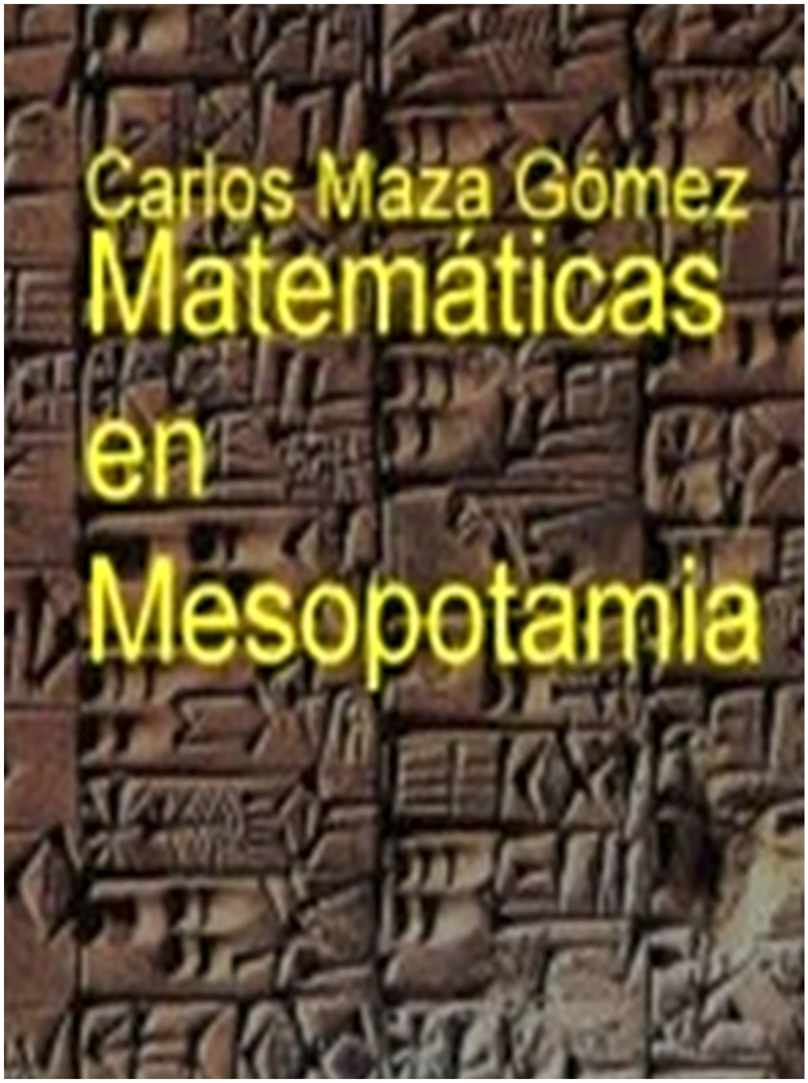
Carlos Maza Gómez
Matemáticas
en
Mesopotamia

Introducción

La civilización mesopotámica empezó a conformarse como tal varios milenios antes de nuestra era. Su importancia reside en ser la primera que deja testimonio escrito de sus logros, los instrumentos para la resolución de sus problemas cotidianos, la importancia de los dioses, la adivinación de sus designios, la estructura social de sus gentes, los avatares de su historia. Conceptos como los de clases sociales, la construcción de ciudades, la enseñanza de conocimientos, el imperialismo, la defensa de intereses económicos, la expansión y control de la tierra, el aprovechamiento agrícola, el comercio y tantos otros, encuentran en Mesopotamia su primera expresión constatable.

Dentro de las actividades de aquel tiempo destaca sobremanera la utilización instrumental de conocimientos matemáticos para la resolución de problemas económicos cotidianos. Desde el registro numérico de bienes depositados en los templos o intercambiados entre los distintos agentes económicos, hasta los cálculos geométricos y algebraicos necesarios para la construcción de canales de irrigación en los campos, las matemáticas se van constituyendo desde una perspectiva eminentemente práctica, alejada de todo planteamiento abstracto. Las matemáticas no existen como tales sino que son un mero instrumento para la resolución de problemas y, desde este punto de vista, los cálculos generadores de una solución se van constituyendo como algoritmos cuyos pasos deben seguirse en el orden adecuado.

El estudio de la matemática mesopotámica sigue hoy en día teniendo interés para los investigadores que producen estudios cada vez más completos pero aún insuficientes.

Miles de tablillas quedan por estudiar aún, muchas de ellas de carácter contable. El espacio geográfico de la antigua Mesopotamia, casi coincidente con el actual Irak, ha sido siempre un territorio convulso en mayor o menor medida, particularmente durante el siglo pasado, en que las excavaciones promovidas por diversos países europeos permitieron avanzar mucho en el conocimiento de las antiguas culturas del Medio Oriente. Muchos de los esfuerzos en este sentido se dedicaron a las excavaciones en Egipto, indudablemente más agradecidas en cuanto a sus resultados dada la perdurabilidad de sus restos. El interés por Mesopotamia fue más reciente, así como el desciframiento de su escritura cuneiforme, que permitió adentrarse en los testimonios dejados por los escribas de aquel tiempo.

Con todo ello, queda mucho trabajo por hacer que, lamentablemente, no sólo sigue siendo difícil llevar a cabo sino que convive con la desaparición de restos arqueológicos, devastados por recientes conflictos. Ciudades de las que se tiene referencia arqueológica no se han encontrado (caso de Akkad, por ejemplo, centro vital de la cultura acadia), tablillas no se han estudiado, yacimientos arqueológicos están paralizados. A pesar de todo ello se sigue trabajando incansablemente desde distintos centros para avanzar en el conocimiento de aquella civilización, desaparecida hace tantos siglos.

En el aspecto matemático, a los trabajos pioneros de los años veinte y treinta del siglo pasado, han sucedido con el tiempo otros estudios que han permitido tener una visión cada vez más precisa del conocimiento matemático de los mesopotámicos. La mayoría de ellos serán revisados y puestos al día en este trabajo que ahora presentamos. Se ha escrito con la intención de dar a conocer los logros matemáticos de Mesopotamia desde una perspectiva actual y ello en dos sentidos. Por un lado, la información dispersa se va acumulando en libros y revistas sin que haya en castellano muchas publicaciones que permitan encontrar una síntesis pormenorizada de la misma. Por otro lado y esto puede ser aún más importante, el enfoque en el estudio de la matemática mesopotámica ha cambiado en los últimos años.

Se ha comentado ya el carácter instrumental de esta matemática, su naturaleza algorítmica aplicada a la resolución de problemas que surgen en un contexto económico. Resulta imposible comprender adecuadamente estos resultados, los cálculos efectuados, las técnicas empleadas, aislándolas del contexto en el que surgen y cobran sentido. Es por ello que una historia de la matemática mesopotámica debe estructurarse, no por el contenido matemático en sí mismo, sino en función del tipo de problemas que resuelven dentro de un contexto específico.

Por ello esta obra no aspira sólo a mostrar dichos contenidos de la manera más completa posible sino a imbricarlos en el contexto social y económico que marcan su nacimiento y permiten justificar su construcción.

Este plan condiciona la división en capítulos que se ofrece en esta obra. Los tres primeros muestran el marco en que se desenvuelve el trabajo de los escribas. El tercero es el económico, el origen más inmediato de los problemas matemáticos. Sin embargo, la economía se comprende dentro de la una estructuración social determinada (relaciones entre la ciudad y el campo, estructura familiar, funciones de reyes y sacerdotes) que, a su vez, viene condicionada por el marco geográfico e histórico de este pueblo, tratado en el primer capítulo.

A partir de estos marcos se abordan en los capítulos 4 y 5 cuestiones comerciales y de intercambio de bienes dentro de los templos y palacios, origen de la primera numeración de carácter sexagesimal y las primeras formas aritméticas de contabilidad.

Siendo la agricultura la base de la riqueza mesopotámica resultaba esencial para temas de producción y tasas sobre la misma el conseguir una medida de la superficie de dichos campos de la manera más exacta posible. Estos aspectos geométricos sobre figuras rectilíneas son tratados en el capítulo 6 que tiene su extensión en el siguiente, a la hora de tratar figuras circulares de aplicación a la construcción de edificios. La relación de estos cálculos geométricos con instrumentos algebraicos encuentra otra de sus aplicaciones en la necesidad de repartir en herencia un campo de diversa forma, tal como se muestra a través de ejemplos en el capítulo 8.

Es conocido que los instrumentos matemáticos desarrollados por los escribas mesopotámicos son de naturaleza algebraica, antes que geométrica. Esta característica esencial viene analizada en los capítulos 9 y 10, donde se abordan diversos casos de resolución de problemas que hoy reconocemos como ecuaciones de primer y segundo grado.

Se deja para un solo capítulo, el 11, el análisis de la tablilla matemática más famosa de este período: la Plimpton 322. Tras mostrar su constitución se desarrolla con el mayor detalle cada una de las hipótesis que se han formulado sobre su naturaleza, desde la que la concibe como un conjunto de tripletas pitagóricas hasta las que dicen mostrar su carácter trigonométrico. Es indudable que muchas tablillas se perdieron irremisiblemente, que otras permanecen a la espera de su descubrimiento y análisis, que sólo han llegado hasta nosotros una pequeña parte bien conservada de la ingente producción de aquella época. Muchos de los textos conservados son de naturaleza escolar, objetos de enseñanza.

Es posible que existan conocimientos más desarrollados que desconocemos. En este sentido, la tablilla Plimpton parece apuntar hacia un saber muy desarrollado que, sin embargo, sólo ha llegado hasta la actualidad mutilado.

Los tres últimos capítulos, desde el 12 al 14, se dedican a una de las labores más frecuentes de los escribas, además de la contabilidad mencionada: la construcción, sea de muros como de excavación de canales. Todo ello es abordado en estos capítulos a través de numerosos ejemplos que se explican con detalle que dejan en evidencia la sofisticación de alguno de los métodos matemático de la época.

Este trabajo viene a cubrir un hueco dentro de la bibliografía en nuestro país, no porque no existan trabajos previos de calidad, sino por el hecho de que se ha hecho un trabajo que mezcla lo divulgativo con el análisis pormenorizado de las técnicas registradas, estructurando su exposición en torno a los problemas económicos y sociales de aquella civilización, cuyos logros sigue siendo necesario conocer.

Capítulo 1
Marcos geográfico e histórico

Un país entre dos ríos

Ésta es la traducción del término Mesopotamia, de origen griego. La cultura que florece varios milenios antes de Cristo en esta región del Oriente Medio es, como en Egipto, China o la India, de naturaleza fluvial. Sus dos ríos, en un transcurso de alrededor de dos mil kilómetros, constituyen la fuente de la agricultura, elemento fundamental para la vida y la higiene.

Mesopotamia ocupaba la tierra que coincide en gran medida actualmente con Irak. El recorrido por el país puede comenzar precisamente en la desembocadura de ambos, en el Golfo Pérsico (figura 1).

Figura 1

Hoy los dos ríos que atraviesan el país, el Éufrates y el Tigris, se reúnen antes de desembocar en el delta de Shatt el Arab pero todo hace indicar que antiguamente no era así y ambos tenían salidas diferentes. El hecho de que los testimonios de aquella época señalen que la ciudad de Ur, por ejemplo, era costera cuando sus restos se han encontrado a 150 km del Golfo Pérsico, así como la inexistencia de yacimientos arqueológicos más al sur de esta ciudad, parece indicar que el aluvión constante de tierras y piedras ha ido alejando, a lo largo de los últimos dos milenios, esa desembocadura.

En esta zona, que actualmente se extiende en torno a la ciudad de Basora, los dos ríos se dividían en innumerables brazos propiciados por la horizontalidad del terreno. Se creaba así un conjunto de lagunas, ciénagas y pantanos insalubres que los naturales llamaban "Río Amargo", donde era difícil asentarse. Por este motivo hay que buscar hacia el norte la primera cultura identificada, la integrada por los sumerios. Ésta pudo levantar sus chozas primero, edificios de adobe después y, finalmente, crear ciudades como Ur, Lagash o Eridu. El hecho de que las tierras tuvieran una muy escasa elevación respecto al nivel del mar hizo que el proceso de inundaciones frecuentes y la escasez de reflujo de estas aguas a su cauce propiciara una creciente salinización al elevarse el nivel freático. Todo ello propició un empobrecimiento creciente de las posibilidades agrícolas del sur de Mesopotamia que, no obstante, se fue manifestando tiempo después de la caída de los sumerios.

Prosiguiendo hacia el norte el terreno se vuelve progresivamente más árido pese a lo cual sigue siendo una tierra muy apta para la agricultura. El cultivo principal fue el cerealístico, en concreto la cebada, que fue la base de la alimentación, y el sésamo, origen de un aceite de diversa utilidad (alimentación, medicina, iluminación, etc.). Allí se levantó en su tiempo Akkad, la capital de los acadios, cuya localización exacta hoy se ignora.

Este pueblo tenía un origen semita y debía provenir de Arabia y Siria, hacia el oeste. Fueron adentrándose poco a poco desde el norte hasta encontrarse con los sumerios, que contaban por entonces con una cultura más avanzada en muchos aspectos (administrativos, culturales, etc.). Los acadios, seminómadas, se fueron aposentando en aquellas tierras llegándose a una simbiosis bastante fecunda con los sumerios a los que, finalmente, apartaron del poder para hacer nacer con Sargón la primera idea imperial.

Hacia el sureste de Mesopotamia se levantan los montes Zagros, al otro lado de los cuales se extiende la meseta irania. No son grandes elevaciones y, aunque constituyan un obstáculo, éste es salvable con relativa facilidad. De hecho, el país de Elam residía en estas montañas durante el tiempo de los sumerios y acadios de forma que las relaciones entre todos estos pueblos fueron fluidas. Había dos formas de salvar los montes Zagros. Por el sur era difícil por encontrarse muchas zonas pantanosas, extensión de las existentes en la desembocadura de los ríos.

Pero el Tigris, el río más al este, recibe numerosos afluentes provenientes de estas montañas y se podía remontar su curso con facilidad. Alternativamente, se podía viajar más hacia el norte y luego seguir un camino hacia el este, salvando las elevaciones principales de los Zagros.

El sur mesopotámico encontraba hacia el oeste una barrera natural difícil de atravesar: El desierto sirio o arábigo. Desde el otro lado habían venido las tribus acadias pero no atravesando el desierto sino viajando hacia el norte, por tierras de Palestina y Siria, donde la proximidad del Mediterráneo favorece la desaparición del desierto y la facilidad de tránsito.

Poco más al norte de la tierra de los acadios, prácticamente donde se articula el sur con el norte mesopotámico, se levantó Babilonia, cultura que resulta heredera directa de la relación entre sumerios y acadios. A partir de este punto, hoy cercano a Bagdad, el Éufrates va haciendo un gran codo hacia el oeste dando lugar a la existencia de una gran meseta entre ambos ríos, Al Jazirah.

Las precipitaciones en esta zona van disminuyendo y la tierra es abrupta y ondulada, de manera que los valles formados por ambos ríos se unen a diversas cadenas montañosas hacia el norte. El desierto está omnipresente propiciando la escasez de ciudades de importancia y un modo de vida fundamentalmente tribal y nómada si bien había pequeños asentamientos a lo largo de las riberas fluviales. Como en el caso de los acadios, los nómadas no lo eran en sentido estricto, no deambulaban de un lado a otro con el ganado, sino que eran conocedores de la existencia de pastizales según la estación de que se tratara. De este modo llegaban a asentarse durante ciertos períodos de tiempo llevando una existencia, por tanto, seminómada, con algunas características sedentarias. Aunque la relación entre la ciudad y el campo generó sus tensiones en algunos momentos, se puede afirmar que toda la historia mesopotámica se ve atravesada por una relación muy estrecha entre ambos ámbitos. En este lugar del norte, actualmente en torno a Mosul, de forma simultánea a los babilonios, floreció la civilización asiria. Aunque durante mucho tiempo, durante el predominio babilónico, Asiria fue una tierra dedicada fundamentalmente al comercio, siglos después llegó a constituirse en uno de los imperios más conocidos. Sobre el río Tigris se levantaron en su tiempo sus ciudades más importantes, Assur y Nínive.

Los comerciantes asirios encontraron en el norte los montes Tauro. Hacia el este, en la actual Armenia, nacen los dos grandes ríos mesopotámicos y el paso es difícil. Sin embargo, por el oeste el tránsito es más fácil y las caravanas podían adentrarse en la península de Anatolia, actual Turquía, donde se habían asentado tribus indoeuropeas como los hititas y los hurritas.

En suma, Mesopotamia fue una tierra bien diferenciada entre el norte (desértico excepto por la presencia de pequeñas poblaciones junto a los ríos) y el sur (tierra de aluvión, propicia para la agricultura), entre un oeste presidido por el desierto arábigo y sirio y el este donde se levantaban los montes Zagros. Sin embargo, hay una característica que sobresale en el conjunto y que diferencia a la cultura que aquí nace de la cercana egipcia. La tierra de Mesopotamia está abierta al tránsito de tribus nómadas o seminómadas. Por el sur, en la desembocadura de ambos ríos, existió un activo comercio marítimo, tanto con los países del Golfo Pérsico sino incluso más allá, encontrándose restos comerciales mesopotámicos en yacimientos indios.

Por el noroeste existía un paso frecuente de caravanas y tribus que provenían de Palestina, Arabia y Siria. Por allí vinieron los semitas acadios, incluso los egipcios llegaron a tierras mesopotámicas en cierta ocasión comandados por su faraón guerrero, Tutmosis III. También por el este había un paso franco bordeando los montes Zagros como bien supieron los babilónicos cuya civilización fue invadida tanto por los hititas provenientes del norte como por los casitas que habitaban los citados montes.

Mesopotamia es una tierra abierta al paso y la invasión de unas y otras tribus. Quizá por ello su historia resulta ser mucho más cambiante en cuanto a las formas políticas y administrativas, que la cultura que nacía en el valle del Nilo.

Cronología

En períodos tan alejados de los actuales, la cronología es siempre cuestionable y con un margen de error que puede llegar a ser considerable. Se suele atender a los restos arqueológicos con su datación oportuna, las informaciones cronológicas de los propios documentos de la época y, en particular dentro de esta cultura, al testimonio recogido sobre sucesos astronómicos que es posible datar con bastante exactitud.

Con ello y el análisis de lo acaecido desde el punto de vista cultural y político se puede precisar la existencia de diversos períodos temporales que reflejan cierta unidad.

Dado que el estudio que aquí se ofrece se centra fundamentalmente en el contenido matemático alcanzado en Mesopotamia no tendrá mayor interés estudiar y discutir cuestiones cronológicas. Se ha optado por aceptar la propuesta de Sanmartín (Sanmartín y Serrano, 1998) que se articula en torno a tres fases de naturaleza cultural que ofrecen la posibilidad de ser subdivididas en distintos períodos de naturaleza más política. A ello se acompaña una cronología redondeada en torno a los distintos milenios en que se sitúa la cultura mesopotámica.

Protohistoria: Desde el 3300 al 2900 a.C.

Tanto al norte como al sur de Mesopotamia se empiezan a levantar las primeras ciudades con cierta entidad, al tiempo que en una de ellas (Uruk) se registran los primeros documentos escritos, fundamentalmente de naturaleza contable.

Fase I: Simbiosis sumero-semita: Desde el 3200 al 2000 a.C.

Dos culturas diferentes, la sumeria al sur, de origen incierto, y la semita (acadios), más al norte, van a crear, al imbricarse entre sí, un desarrollo sostenido de las ciudades estado (3200-2500) y el nacimiento de las primeras ideas imperialistas por parte de los acadios, acabando con el importante encumbramiento de la tercera dinastía de Ur (2200-2000).

Fase II: Neoclasicismo babilónico: Desde el 2000 al 500 a.C.

Los amorreos fueron tribus que, tras derribar el poder acadio, vinieron a constituir en Babilonia un nuevo centro de poder, heredero directo y renovador de la fase anterior. Tras una época paleosemítica (2000-1000) en que la centralización es débil y los territorios aparecen fragmentados, se llega a una etapa semítica en que surgen estados imperialistas, como el propio babilónico y, sobre todo, el asirio (1000-500), que hasta entonces había vivido a la sombra del anterior.

Epílogos Desde el 500 a.C. al 700 d.C.

Mesopotamia vive entonces bajo la influencia exterior, sea por la vía helenística (500-100 a.C.) o por el dominio iranio-parto (100 a.C.-700 d.C.).

De cara al contenido matemático que muestra esta cultura el mayor interés en este estudio se centrará en las fases I y II, aunque eventualmente también será necesario mencionar la protohistoria, sobre todo en relación al comienzo de la escritura y la contabilidad.

La simbiosis sumero-semita

Los primeros emplazamientos que se encuentran en esta tierra se sitúan al norte de Mesopotamia. Ello no es extraño sabiendo que los más antiguos yacimientos arqueológicos se están en terreno palestino y luego, siguiendo la dirección sureste del llamado "Creciente fértil", en Anatolia, de forma que la búsqueda de nuevos emplazamientos del hombre neolítico le llevó previsiblemente a asentarse en las orillas de los ríos Éufrates y Tigris. Sin embargo, la cultura de mayor importancia es la sumeria y ésta busca su emplazamiento al sur, en la desembocadura de los ríos, junto al Golfo Pérsico, hacia finales del cuarto milenio. Todos los datos de que se dispone indican que no son autóctonos. Sus restos aparecen en un momento determinado sin que existan precedentes anteriores en tal zona, si bien no constituyendo una ruptura que denunciara una posible invasión del territorio. Por este motivo y por la propia afirmación de los interesados de provenir de la llamada

"Tierra negra", se han realizado muchas especulaciones sobre cuál puede ser el origen anterior de esta cultura. La más verosímil sitúa su venida desde tierras indias.

Hacia 2900 a.C.

Cuando los sumerios se establecen al sur de Mesopotamia ya encuentran algunas ciudades, como Uruk.

Es indudable, sin embargo, que su llegada coincide con el nacimiento de la civilización urbana. La presencia de tribus semitas más al norte también aparece atestiguada. Estas tribus constituían la primera avanzada desde las planicies semidesérticas al oeste del Éufrates y, al encontrar a los sumerios, fueron relacionándose estrechamente con ellos.

Hay que considerar que las costumbres y características culturales de ambos pueblos eran distintas pero de un modo que podían complementarse. Así, por ejemplo, los sumerios disponían de una administración centralizada y tendían a agruparse en ciudades de forma sedentaria. En cambio, las tribus semitas eran seminómadas en su mayoría, solían trabajar en el campo con la ganadería y la agricultura, organizándose en torno a clanes familiares de manera más individualizada.

La tierra de este sur mesopotámico era entonces grande para tan pequeña población. Al tiempo, se registraban inundaciones frecuentes por la horizontalidad del terreno, alternándose las parcelas secas con otras pantanosas. Ello condujo al nacimiento de pequeñas ciudades aisladas en principio unas de otras. Sin embargo, la continua relación social y económica entre ciudad y campo, llevaba a una expansión mayor de las ciudades tanto físicamente como en la búsqueda de pastos y terreno fértil. El desarrollo de vías comerciales constituyó asimismo un fuerte impulso en el avance de los sumerios hacia el norte, intentando controlar el curso del agua del que dependían. Esta situación condujo a enfrentamientos frecuentes entre las llamadas "ciudades estado". Es un tiempo en que se comienzan a levantar murallas en torno a ciudades como Uruk, que llegan a alcanzar los 9 km. de longitud y dan lugar a leyendas épicas de conquista y defensa de los territorios, como la del héroe Gilgamesh.

Al igual que sucede en otras culturas antiguas como la distante china, la pugna y expansión de las ciudades tuvo como colofón el dominio bélico de una de ellas. Como ejemplo (Blázquez y ot. 1992) se puede escoger la ciudad de Lagash que conoció una primera dinastía de gobernantes en el 2495 bajo el vasallaje de Ur. A mediados de siglo, gobernando Eannatum, alcanza su propia independencia y comienza un período de expansión militar que le lleva a ocupar Mari, importante nudo de comunicaciones entre norte y sur en el Éufrates medio, así como a expandirse hacia el Elam. Sin embargo, mantuvo una pugna durante todo este tiempo con la ciudad de Umma, tal como se refleja en la "estela de los buitres" en honor a Eannatum:

> *"Eannatum tiró la gran red de batalla de Enlil sobre el hombre de Umma y sobre ella le hizo jurar. El hombre de Umma a Eannatum hizo juramento: "¡Por la vida de Enlil, señor del cielo y de la tierra! ¡Yo puedo trabajar el campo de Ningirsu como préstamo! ¡Yo no....el canal de riego! Jamás violaré el territorio de Ningirsu.*
> *Yo no cambiaré el curso de sus arroyos y acequias.*
> *¡Yo no desplazaré su estela! Si alguna vez incumplo (este juramento), que la gran red de batalla de Enlil, rey del cielo y de la tierra, sobre el cual he jurado, descienda sobre Umma"* (Liverani, 1995, p. 164).

Con el tiempo Umma, al mando de Lugalzagesi, terminará por derrotar a Lagash erigiéndose en gobernante de todo el sur mesopotámico. Con él surge la primera idea de un imperio que coronará Sargón I desde la nueva ciudad de Akkad hacia el 2335 a.C.

Hacia 2350 a.C.

Sargón I parece haberse lanzado a un proceso creciente de conquista y dominio de tierras incluso fuera del ámbito mesopotámico. Así, se dirigió inicialmente hacia el oeste, subiendo por el curso del Éufrates, ocupando Mari, penetrando en Siria y llegando incluso al Mediterráneo. La lengua sumeria sería sustituida paulatinamente por la acadia.

Conforme a ello las tablillas de la dinastía sargónida adoptaron nuevos formatos imponiéndose una versión oficial de la escritura, así como una progresiva unificación de las medidas de peso, superficie, etc.

La historia de esta fase en la cultura mesopotámica oscila entre la idea de un imperio y el predominio de las ciudades estado, más locales y limitadas en sus aspiraciones y expectativas. Toda esta pugna entre los dos modelos se verá alterada por la irrupción constante de fuerzas tribales externas como los Guti, asentados en los montes Zagros, que derriban a la dinastía sargónida.

Una atención especial hay que dedicar a la III dinastía de Ur por cuanto en su tiempo se sitúan muchos de los restos arqueológicos más importantes de naturaleza contable y matemática, la gran mayoría de ellos encontrados en excavaciones ilegales de finales del siglo XIX, lo que hace muy difícil su datación. Los Guti terminan con el reinado del último rey sargónida, Sharkalisharri, hacia 2193, devastando en el transcurso de sucesivos enfrentamientos la ciudad de Akkad así como Ur y Uruk, de gran importancia entonces en el sur mesopotámico. Sin embargo, fueron incapaces de hacerse con los resortes del gobierno limitándose a cortar los caminos, saquear e incendiar. Finalmente se fueron replegando hacia los montes Zagros de manera que las ciudades sumerias al sur (Lagash, Ur, entre otras) volvieron a desarrollarse de forma autónoma. Ésta quedó plenamente confirmada con la derrota definitiva de los Guti (2120) a manos del rey Utukhegal de Ur.

Hacia 2120 a.C.

Nace así una nueva dinastía de reyes que ejercerán un control importante sobre toda la zona revitalizando la idea imperial de Sargón I. Del tiempo del hijo de Utukhegal, Shulgi (2094 - 2047) proviene la mayoría de los documentos importantes encontrados hoy en día. Su largo reinado estuvo caracterizado por una consolidación administrativa y política, primero, y por las brillantes campañas militares que dirigió, después. Respecto de la primera, se encargó de restaurar los templos destruidos en las luchas anteriores con los Guti, reformó los sistemas de pesos y medidas, reconstruyó los caminos y los canales de irrigación destruidos favoreciendo con ello el comercio y la agricultura.

Respecto a la expansión militar alcanzó a dominar, nuevamente, la ciudad de Mari, llave fluvial para el comercio con el norte por el Éufrates, y se extendió hacia el Elam en el oeste a fin de salvaguardar el naciente imperio de las invasiones de las tribus montañesas. Numerosos documentos de la época atestiguan su importancia como es el caso de su himno real:

> *"Yo, el rey, desde el vientre materno, yo soy un héroe, yo, Shulgi, desde mi nacimiento soy un hombre fuerte, yo soy un león de mirada feroz, engendrado por un dragón, yo soy el rey de las cuatro regiones, yo soy un pastor, el pastor del pueblo de las "cabezas negras", yo soy el noble, el dios de todas las tierras...".*
>
> (Cit. por Liverani, p. 234).

A finales del III milenio hubo un desequilibrio importante entre los pobres recursos que ofrecía el norte de Mesopotamia y las necesidades de tribus de amorreos que fluían sin cesar provenientes de Siria. Estas tribus seminómadas fueron descendiendo hacia el sur siguiendo el curso de los ríos hasta encontrarse con el territorio ocupado por la III dinastía de Ur, entonces gobernada por Ibbi Sin (2028 - 2004). Para entonces, la centralización de su antecesor Shulgi se había debilitado ante la creciente autonomía de las antiguas ciudades estado sumerias. Del mismo modo, las tribus de los montes Zagros habían ganado en agresividad realizando incursiones periódicas que mermaban la capacidad militar del imperio hasta su conclusión con el saqueo de Ur y la prisión del último gobernante.

El control del imperio sargónida o de Ur III no era férreo ni de naturaleza política, como lo será en más alto grado el babilónico. Pese al desarrollo de la administración en ambos casos, particularmente en Ur III, el área directa de influencia de los gobernantes era limitada, contentándose con ejercer un control militar esporádico sobre las vías comerciales y exigiendo eventualmente el pago de tributos a las poblaciones más alejadas de dicho área. Sargón I, por ejemplo, manifiesta (Blázquez y ot. 1992) que sus dominios se extienden desde el "mar inferior" (Golfo Pérsico) hasta la ciudad de Tuttul, en el curso medio del Éufrates. Las demás regiones más al norte son áreas con las que se comerciaba activamente y, para proteger dicho comercio y sus vías fundamentales (la fluvial y la terrestre), podía eventualmente ser necesaria una expedición militar que en ningún caso se asentaba en el territorio dentro de emplazamientos militares fijos.

Cuadro cronológico

- 2900 - 2350 Período protodinástico
- 2350 - 2200 Akkad
- 2200 - 2120 Guti
- 2120 - 2000 Ur III
- (Liverani, 1995, p. 34)

Neoclasicismo babilónico

La invasión de las tribus amorreas procedentes del desierto sirio-arábigo terminó con el gobierno unitario de Ur III. Pese a que carecían de experiencia administrativa y política para gobernar grandes extensiones, pretendieron imitar los usos y costumbres, sobre todo en lo que concierne a la organización administrativa, asumiendo incluso la lengua que encontraron, la variedad acadia del sumerio.

Hacia 2025 a.C.

No obstante, terminaron por disgregarse por el territorio ocupado. La causa fundamental fue la naturaleza de sus relaciones basadas en el clan, la territorialidad limitada y, en suma, el pequeño grupo humano y autosuficiente. Es por ello que, pese al ascenso de diversas dinastías poderosas durante el siguiente milenio y medio (Babilonia, Asiria, fundamentalmente) durante un largo período inicial surgieron grupos poderosos en Isin, Larsa y Babilonia, de imposible entendimiento pese a su común origen.

Este período histórico se caracteriza sobre todo por la fragmentación de los estados. Sea con la preponderancia babilónica, desde el 2000 al 1600 aproximadamente, o la asiria después (entre el 1150 y el 600 a.C., aproximadamente), ningún estado podrá vivir con la seguridad de dominar todos los recursos económicos y territoriales, las vías comerciales, sin contar con unos rivales bien visibles. A ello se une el hecho de que, cuando pudo ser así, particularmente con los asirios después de Sargón y con el estado caldeo de Nabucodonosor II (600-550 a.C.), las discrepancias dinásticas dieron al traste inmediatamente con una fuerza tan emergente y poderosa. La naturaleza de clan que se manifiesta en todos los gobiernos de la zona implica que la sucesión no está legitimada sino a través del favor de los dioses y no tanto por la vía de la sangre. Ello implica que, en muchas ocasiones, la descendencia de padre a hijo sea discutida y revocada por la presencia de luchas intestinas dentro del clan gobernante cuando no el levantamiento de otros grupos que desean adquirir la preponderancia negada por el gobernante anterior. Ello conduce a una gran debilidad dinástica que influye en el derrumbamiento progresivo de dinastías aparentemente poderosas y consolidadas.

En todo caso, el afán imperialista de todos los estados gobernantes es notable. Los procedimientos sargónidas y el aparato administrativo y militar de Ur III continúan, en general, durante este período. Se asiste así a una búsqueda constante de las vías fluviales comerciales (Mari, lugar crucial en el curso medio del Éufrates, es invadida varias veces por fuerzas opuestas) y la salida al Mediterráneo con el objeto de asegurarse el suministro de materias primas ausentes en terreno mesopotámico. Estas aspiraciones, en las que se sucederán los intentos de Babilonia y Asiria, se ven dificultadas muy seriamente por la presencia de otros grupos humanos que emigran hacia la península de Anatolia, al norte de Mesopotamia. Son los hurritas, que llegan a someter a vasallaje a los asirios, y los hititas, que incluso consiguen derribar una larga e importante dinastía babilónica ocupando su capital. Todo ello hace que el mundo mesopotámico no esté unificado, como en el período anterior, sino que pueda considerarse multipolar, con varios centros de importancia que luchan entre sí por salvaguardar su territorio, sus vías comerciales y área de influencia, al tiempo que aspiran a aumentarlos.

Hacia 1800 a.C.

A principios del segundo milenio, por tanto, se pueden encontrar varias ciudades que emergen: Isin, Larsa, sobre todo, y una aldea central dentro del territorio mesopotámico, Babilonia. El triunfo de esta última se dirime durante el gobierno del conocido rey Hammurabi (1792 - 1750) que supo aunar con acierto la vía militar y la política, además de asegurarse una administración eficaz. Ocupó así Larsa, al sur, y Esunna, al este, para luego dirigirse hacia el norte y el Mediterráneo. En dirección norte se enfrentó a las fuerzas de Shamsi Adad I, un importante rey asirio que dominaba el tránsito comercial hacia la península anatólica y la región mediterránea, pese a que Alepo le había conseguido rechazar. Su poder limitado al norte no pudo enfrentarse al del rey babilónico que ocupó Mari apoderándose a continuación de Alepo, junto a la costa mediterránea. Hammurabi, famoso por su código, quiso instaurar la imagen del rey, no sólo como guerrero, sino como buen pastor de su pueblo, para lo cual trató de proteger a los necesitados y débiles dictando las leyes de su famoso código, donde al garantizar la ley del Talión (ojo por ojo, diente por diente), conseguía que el vencido y débil pudiera resarcirse ante el más fuerte.

Hacia 1600 a.C.

El reino de Hammurabi y sus sucesores es, como en muchos casos, de corta duración relativamente por cuanto hacia 1600 Babilonia es invadida por el rey hitita Mursili que aprovecha las desavenencias dinásticas y el debilitamiento general del trono babilónico. Dado que los hititas vuelven a sus tierras después de la invasión, el vacío de poder que dejan es ocupado por una dinastía casita, tribu que procedía del este y que ya se había enfrentado a los sucesores de Hammurabi. Con los casitas Babilonia alcanza una estabilidad social amparada, entre otras cosas, por la asunción que hacen los invasores de los modos administrativos precedentes, todos ellos basados en la cultura acadia hasta el extremo de que la lengua babilónica, modificación del acadio, será la preponderante durante milenio y medio. La estabilidad se basa también en el hecho de que la dinastía casita se plantea sobre todo como objetivos los del orden interno, antes que la expansión exterior. Esto hace que Babilonia, como estado imperialista, desaparezca durante varios siglos de la escena mesopotámica hasta caer, posteriormente, bajo el dominio asirio.

Una de las tribus amorreas se había asentado a finales del tercer milenio en el norte de Mesopotamia creando allí la ciudad de Assur, muy cercana al actual Mosul. Los cultivos en esta zona son de secano, hay pocas precipitaciones y se está lejos del terreno de aluvión y las huertas del sur. Es por ello que esta tribu orienta sus pasos hacia la ganadería y, sobre todo, el comercio con el norte donde encontrar las materias primas de que carecen. De este modo, se abren paso por las montañas del Tauro hasta la península de Anatolia donde llevan tejidos y productos manufacturados para obtener, fundamentalmente, cobre y estaño. Crean incluso lugares propios parecidos a colonias comerciales (karum) donde instalarse permanentemente. Entre ellas la más importante radica en la ciudad de Kanish (actual Kultepe).

Tras la muerte de su rey más ambicioso, Shamsi Adad I (1813 - 1781), el estado asirio se desintegró, incapaz de hacer frente al babilónico del que imitó su cultura, sus formas administrativas e incluso sus dioses, sometiéndose finalmente a vasallaje respecto al gobierno de los hurritas, una tribu indoeuropea más al norte.

Hacia 1360 a.C.

Un cúmulo de circunstancias propició el ascenso de Asiria a la primera escena dentro de las luchas mesopotámicas. El rey Assur-uballit I (1363-1328) se encontró con que los hititas terminaron con el estado hurrita en Anatolia así como debilitaron de un modo importante a los babilónicos. Al tiempo, los hititas tenían que enfrentarse a los egipcios en la costa mediterránea por lo que dejaron un considerable vacío en Mesopotamia, cuya importancia dejó de ser central durante un tiempo en la historia del Medio Oriente. Este tiempo fue aprovechado por Asiria para extender su influencia por el Éufrates, donde Adadnirari I (1305-1274) conquistó la importante ciudad de Karkemish, o por los caminos caravaneros de Siria, donde Tiglatpiléser I (1114-1076) ocupó Palmira llegando hasta la costa fenicia.

Es un tiempo de conquista y expansión donde los reyes asirios luchan por el predominio en el norte mesopotámico, tal como muestra la plegaria de Tukultininurta I (1243-1207) al dios Assur:

> *"Para tu ciudad, Assur, la batalla está dispuesta sin tregua, contra ella embiste una oleada de ataques. Enemigos y adversarios no cesan de mirar con malas intenciones tu residencia, y se confabulan para saquear tu país, Asiria.*

Todos los países desean noche y día la destrucción de tus maravillas, por doquier se ensañan para arruinar tus ciudades, conspiran para infligirte una derrota.
Todos los desalmados se reúnen un día tenebroso, sin sol; manos hostiles se alzan para desbaratar los ejércitos asirios...
De tu país, Asiria, tú eres Señor: ¡sé su fuerte, su príncipe vengador!
¡Que tu supremo poder sea por siempre su protección, y apoye su combate!
¡Oh, Señor, por tu país, Asiria, no dejes inactivo tu brazo benefactor!
¡Oh, Assur, gran señor, rey de los dioses, Asiria es tuya! ¡Oh, Enlil asirio, señor de todos los países, Asiria es tuya!" (Liverani, 1995, p. 464).

Hacia 900 a.C.
A comienzos del primer milenio el imperio hitita se derrumba ante el empuje de los llamados reinos del mar, de origen incierto. Al tiempo, todos los estados restantes de la zona sufren la presencia de estos nuevos invasores, entre los cuales el grupo más importante concluye siendo el arameo.
Egipto consigue aguantar la presión bélica de estos grupos y los asirios, ya fortalecidos anteriormente, hacen otro tanto.
Sin embargo, esta creciente presión aramea conduce a que el estado asirio, cuyos objetivos comerciales habían sido hasta entonces preponderantes dentro de un ambiente de pacto y acuerdo, se transforme. La garantía del comercio será cada vez más la fuerza o, al menos, su amenaza. Se instaura así el llamado imperio neoasirio comenzando con el rey que se hace llamar Sargón (a imitación del primero acadio de este nombre que se toma como modelo en su afán expansionista y militar) y siguiendo por sus sucesores Asurnásirpal II (883-859) o Salmanasar III (858-824), que conquistan la península de Anatolia e incluso instauran monarquías asirias en Babilonia.

Hacia 625 a.C.
Su dominio es completo sobre toda la zona pero, al tiempo, es incapaz de afrontar el peligro de una alianza de distintas fuerzas en su contra. De esta forma, los caldeos (tribu aramea), al mando de Nabopalasar, se alían con las tribus medas,

montañeses de los Zagros, para avanzar hacia el norte y, ocupando la conocida ciudad de Nínive (625), derribar de manera definitiva el poder asirio. Se instaura así una corta pero importante dinastía caldea en Babilonia que volverá a recobrar y aumentar el esplendor del pasado para llegar a convertirse en el centro político de todo Oriente Medio. Nabucodonosor II (604-562) llegará a someter a vasallaje a Egipto extendiendo su poder por toda la región y enriqueciendo su ciudad con jardines colgantes, la puerta de Istar o la conocida torre escalonada Etemenanki, modelo de la bíblica torre de Babel.

Hacia 550 a.C.

Finalmente, el predominio de los sacerdotes de Marduk a la muerte del rey y su enfrentamiento con el nuevo rey, Nabónido, hizo crecer el descontento del pueblo y la debilidad general de la dinastía, que terminó por derrumbarse ante el empuje de las fuerzas persas de Ciro. Éste ocupó la ciudad en el 538 como paso previo hacia el dominio de toda la región del Medio Oriente, comienzo del imperio persa.

Resumen cronológico

- 2025 - 1763 Predominio de Isin y Larsa
- 1950 - 1750 Reino asirio antiguo
- 1894 - 1595 Babilonia
- 1600 - 1150 Casitas en Babilonia
- 1360 - 1050 Reino asirio medio
- 900 - 615 Imperio neoasirio
- 625 - 539 Caldeos en Babilonia
- 550 Comienzo del imperio persa (Liverani, 1995, p. 34)

Capítulo 2
Marco social

El campo y la ciudad

Varios milenios antes de que comenzase la civilización sumeria en Mesopotamia, la vida para los habitantes de Palestina fue haciéndose sedentaria. Las primeras ciudades, en particular Jericó, datan del milenio VIII (Kostof, 1988). Dentro del desierto del mar Muerto los nómadas que recorrían aquella tierra se fueron asentando en torno a la principal fuente de agua de la zona, la de Elisha. Colocaron sus tiendas unas junto a otras durante un tiempo prolongado hasta que el sedentarismo naciente y el deterioro que los elementos naturales causasen sobre tales tiendas hizo que se fuera construyendo un asentamiento permanente en adobe. Las casas se hicieron redondeadas, a imitación de los primeros habitáculos.

A medida que la forma de vida sedentaria, basada en la agricultura sobre todo, se iba extendiendo por la franja mediterránea hacia Siria, Anatolia y luego bajaba por las cuencas del Éufrates y el Tigris, se van encontrando restos arqueológicos de otras ciudades de mayor o menor tamaño, desde Catal Hüyuk hasta Tell es-Swan terminando, hacia el cuarto milenio, con la espléndida ciudad de Ur, ya en el sur de Mesopotamia. Las casas redondeadas suelen estar conformadas por un pilar central del que irradian vigas hacia el límite de la circunferencia que forma su techo. Sin embargo, las sucesivas ampliaciones necesarias porque la unidad familiar crezca o haga falta un almacén suplementario, resultan mucho más sencillas de efectuar cuando la planta de las casas adquiere una forma rectangular. Así se pueden añadir tantas habitaciones como se desee sin más que construirla junto a la primera abriendo una puerta intermedia (Margueron, 1996).

Pero esta técnica, aunque denota un mayor dominio del espacio que va a conformar el hábitat, no es desde luego la causa de la creación de las ciudades, sino el efecto de un modo de vida crecientemente sedentario. Ya en el terreno mesopotámico se puede distinguir una evolución diferente en el proceso de sedentarismo, sea en el norte o en el sur. El norte está circundado por montañas, los Zagros hacia el este y los montes Tauro que lo separan de Anatolia, al norte. En ellas viven tribus de montañeses que llevan el ganado de un lado a otro, según los pastos existentes. En el verano, cuando los de las montañas se agostan, tendían a bajar hacia los valles de los ríos, uno de los pocos lugares donde el ganado podía tanto abrevar como pastar. Allí se debían reunir con otras tribus nómadas que recorrían el territorio desde el desierto sirio al oeste hasta la cuenca de ambos ríos. El nomadismo por entonces era de este tipo, el denominado "nomadismo de enclaves" (Postgate, 1999). Esta forma de vida condujo a que las ciudades como tales no fueran necesarias durante bastante tiempo y se conservara la organización tribal y clánica de los habitantes de la zona.

La situación en el sur era diferente. Había una tierra muy horizontal y fácilmente anegable por la crecida de los ríos. Con ello se formaban pequeñas islas donde se agrupaban los habitantes que se comunicaban, en muchas ocasiones, por vía fluvial. Al tiempo, la tierra era más fértil que en el norte siempre que se controlase la fluctuación de la crecida. En otras palabras, ésta provocaba que determinadas tierras se anegaran, otras fueran fácilmente objeto de agricultura mientras que algunas quedaban no irrigadas. Cualquier alteración en el curso superior del río por medio de la construcción de canales secundarios con los que irrigar otras tierras tenía profundas consecuencias en el regadío de tierras situadas más cerca de la desembocadura. Estas circunstancias, si no se coordinaban adecuadamente, podían dar lugar a conflictos de todo tipo. Además, las labores de irrigación con las que ampliar los campos de cultivo no eran una tarea fácilmente ejecutable por una sola familia, por grande que ésta fuera.

Surge así una necesidad de coordinar los esfuerzos de las distintas familias que se habían asentado en el territorio, labor mucho más fácil si todas ellas pertenecían a la misma tribu de ocupantes de aquella tierra, en concreto e inicialmente, los sumerios. Es por ello que la ciudad de Uruk, ya existente, conoce un florecimiento creciente desde su llegada.

Las ciudades de la época protodinástica se fueron alejando del modelo igualitario de las precedentes a medida que pasaban desde el tamaño y costumbres de las aldeas hasta su constitución como enclaves permanentes y con funciones diferentes. Podían llegar a ser de considerable tamaño. Desde la época de las ciudades estado, cuando se enfrentaban por extender su poder unas contra otras, Larsa, Lagash, Umma, etc., el espacio ciudadano venía delimitado por murallas que rodeaban la ciudad conformando su perímetro. Ello con notables excepciones como la ciudad santa de Nippur donde la tradición situaba la irrupción del dios Enlil en la historia de Mesopotamia. En la epopeya de Gilgamesh, por ejemplo, se afirma que una de las grandes obras de este rey fue el levantamiento de la muralla que rodeaba las 400 há de la ciudad a lo largo de nueve kilómetros.

> *"Observa si su muralla no es (tan recta) como la cuerda (del arquitecto),*
> *Inspecciona su... muralla, a la cual ninguna puede igualar;*
> *Toca la piedra del umbral-data de tiempos antiguos"*
> (Postgate, 1999, p. 99)

Había varias partes fundamentales en una ciudad de aquella época. Por un lado estaban las dos casas principales: la del dios, el templo, y la del rey, el palacio o "Casa grande". Junto a ellas construían sus casas las familias más cercanas a ambos poderes, personas que trabajaban sobre todo en el palacio ejerciendo allí sus funciones económicas o administrativas. Esta clase social más poderosa recibía el calificativo de *"awilu"* (hombre) que textualmente viene a significar la persona que no necesita de otros para su subsistencia. La integraban los ciudadanos que trabajaban para la administración del palacio, escribas, sacerdotes que se dedicaban al ritual y los cultos del templo. Muchas veces, además de la función palaciega o en el templo, disponían de tierras propias que les aseguraban el sustento fundamental. Junto a sus casas podían contar con otros establecimientos como talleres metalúrgicos, de cerámica, etc.

Otra parte de la ciudad estaba ocupada por el pueblo más llano, el que vivía pobremente de un pequeño comercio o bien disponía de una parcela escasa. Son los *"muskenus"* (mezquinos), una clase social libre pero fácilmente desprotegida. Sus casas estaban en general apiladas unas sobre otras dejando un estrecho margen tanto para el tránsito como para la instalación de puestos callejeros. Los barrios así constituidos estaban rodeados por las murallas cuyas puertas eran los puntos fundamentales de la vida comercial y ciudadana hasta el punto de llevarse a cabo reuniones de distrito en sus cercanías.

Fuera de las murallas se extendían las barracas de los más pobres, sus huertos y corrales, propiedad de aquellos que aún no habían conseguido un lugar dentro de la ciudad viviendo en una cierta transición desde la aldea o el campo al interior de las murallas. Eran otros mezquinos o bien, incluso, esclavos más o menos emancipados. Más allá se podía encontrar, eventualmente, un "muelle" o lugar donde los comerciantes instalaban sus almacenes y tiendas gozando de cierta autonomía en su actividad al tiempo que vivían allí acogiendo caravanas y, en general, a comerciantes extranjeros.

Una de las claves en la estructura social de la ciudad mesopotámica es la aparición de una clase de trabajadores especializados o artesanos que suministraban bienes necesarios vendiéndolos al palacio, el templo o a otros particulares. Este paso sólo fue posible cuando el mayor dominio del riego de los campos hizo aumentar la producción agrícola obteniéndose un excedente. Esto condujo a que se pudiera dar este excedente a determinadas personas especializadas, sea en la construcción de cuchillos, cestos, útiles metalúrgicos, armas, etc. Al tiempo, terminaba la autarquía de las familias y los clanes inaugurándose una organización superior que es el embrión del estado que llegaría a formarse encabezado por el rey.

Los artesanos se movieron entre la condición de hombres y mezquinos aunque las clases sociales eran relativas y no existía una rigidez grande. Un funcionario de palacio podía ser un hombre para muchos de sus ciudadanos más pobres pero dependía del reparto real de las raciones y, en ese sentido, podía ser considerado un ciudadano dependiente de otro. Al mismo tiempo, un artesano independiente podía ver disminuida su riqueza hasta el extremo de condenarle a la pobreza, sea por la pérdida de las tierras, el incendio de su taller o, simplemente, por la pérdida del favor real.

De todo ello no debe concluirse que existieran tensiones entre las distintas clases sociales y ni siquiera entre la organización en clanes y la más jerárquica propia de la ciudad gobernada por el rey. La mayor tensión, durante el tiempo estudiado, siempre fue entre la ciudad y el campo, entre los ciudadanos sedentarios y aquellos que vivían en los campos abiertos ejerciendo un nomadismo de enclaves. Así se describía, por ejemplo, a los amorreos por parte de los ciudadanos que les observaban:

> *"Un habitante de tienda... viento y lluvia,... que extrae trufas de las colinas, pero no sabe arrodillarse; que come carne cruda; que no tiene casa durante los días de su vida, y no es enterrado en el día de su muerte"* (Postgate, 1999, p. 110).

El desprecio mutuo se adivina en sus escritos, así como el temor de unos respecto de los otros, lo que no obsta para que hubiera una relación comercial más o menos fluida al objeto de responder a mutuas necesidades. Así, el nómada se acercaba al entorno de la ciudad para proporcionar a sus habitantes la lana, las pieles, bisutería y productos del campo con los que el palacio pagaba a sus funcionarios, mientras que encontraba en sus atestadas y estrechas calles los productos manufacturados, herramientas, productos de lujo, etc. Había, por tanto, una atracción recíproca que desembocaba, no pocas veces, en el asentamiento de los nómadas junto a las murallas construyendo casas provisionales como las que se han mencionado. Ello pasó con los amorreos a finales del tercer milenio, tribus procedentes de los desiertos arábigo y sirio, que accedieron al poder al disolverse el imperio de la dinastía III de Ur, así como con los arameos en la primera mitad del primer milenio.

En todo caso, la ciudad no vivía encerrada en sí misma, ni siquiera en los tiempos protodinásticos. En efecto, las ciudades estado de esta época deseaban controlar los intercambios con las aldeas donde frecuentemente poseían tierras propias que servían de sustento al palacio, al templo o a los propios funcionarios de ambos. De igual manera, el deseo de control se extendía a los caminos seguidos por las caravanas de comerciantes que traían los productos y materiales no existentes en el sur mesopotámico, a los ríos y sus canales de irrigación. A medida que la situación prosperaba y crecían los excedentes agrícolas aumentaba la población de las ciudades y su entorno. Todo ello conducía frecuentemente al enfrentamiento de unas ciudades con otras hasta que, tiempo después, se llegó a una idea imperial que es una traslación de estos mismos planteamientos ciudadanos y comerciales a una escala mucho mayor.

La estructura familiar

Suele admitirse la preponderancia en los tiempos arcaicos de la macrofamilia, es decir, la formada por todos aquellos vinculados por lazos de sangre. Varias macrofamilias podrían unirse, a su vez, para constituir un clan que habitualmente estaba relacionado con algún animal totémico (pez, escorpión, etc.). Esta amplia estructura familiar era encabezada por un patriarca que regía la comunidad de ancianos reunida eventualmente para tomar las decisiones pertinentes al clan. Rastros de esta organización aparecen en los primeros tiempos protodinásticos cuando la elección de un rey eventual y efímero, capaz de enfrentarse a un peligro concreto por medio de una autoridad delegada, era decidida por un grupo de ancianos que representaban a las distintas macrofamilias del clan.

Sin embargo, esta estructura familiar chocaría, posteriormente, con la más jerarquizada propia del tiempo de los sumerios y acadios, en que el rey ostentaba una autoridad permanente que no se hacía derivar exclusivamente de las decisiones humanas sino que radicaba en el favor o voluntad divinos. La propia formación de las ciudades, en algunos casos albergando hasta un cuarto de millón de personas, como era excepcionalmente Ur durante la dinastía III, unas ciudades construidas alrededor de un palacio, un templo, una estructura social dependiente de estos órganos relacionados con la administración y la divinidad, tendía a romper la autoridad propia de la macrofamilia. Es por ello que se encuentran repetidos testimonios de la importancia de la familia nuclear en las ciudades, es decir, la formada por la pareja y los hijos, fueran naturales o adoptados.

> *"Las unidades macrosociológicas -clan y tribu- son irreconciliables con una estructura estatal fuerte, de modo que tienden a hacerse más efectivas en los ambientes nómadas autóctonos o cuando se relaja la presión ejercida por el estado urbano centralista"* (Sanmartín y Serrano, 1998, p. 75).

En la medida en que la influencia palaciega se extendía a las propiedades que tenían los funcionarios y sacerdotes fuera de las murallas de la ciudad, esta consideración creciente de la familia nuclear también se podía encontrar en el campo en tanto sus habitantes fueran sedentarios. En este sentido, el padre era el único sujeto jurídicamente existente por cuanto todo lo adquirido por miembros de su familia era de su propiedad. Ello traía, como contrapartida, la obligación de velar por todos sobre los que tenía derecho de vida y de muerte con algunas limitaciones. Así, por ejemplo, al hombre le era posible tener una segunda mujer, sea porque la primera y más importante estuviera enferma o, sobre todo, fuera estéril, pero ninguna mujer podía ser repudiada si había dado hijos al hombre.

Sus propiedades, tierras, casas, aperos de labranza y demás utensilios, eran repartidos entre sus hijos a su muerte. Esto podía conducir a una excesiva fragmentación de la tierra acarreando malas consecuencias a la larga. Así, era difícil conservar una parte de la tierra en barbecho y otra produciendo si la extensión de tierra era tan escasa que apenas servía para la subsistencia, pero lo contrario (el cultivo intensivo) agotaba la tierra en poco tiempo. Además, unas tierras disfrutaban de un mejor regadío que otras y cualquier mejora en este sentido (ampliando los canales de irrigación, por ejemplo) era una labor comunal antes que individual. En suma, todo ello conducía a la conveniencia de mantener unidas las tierras para cultivarlas de forma agrupada por parte de toda la familia. Esto, desde luego, no tenía aplicación en los bienes de la ciudad.

Aunque la labor comunal fuera conveniente ello no excluía el reparto de la tierra asignándose cada parcela a uno de los hermanos a la muerte del patriarca. En este sentido, el primogénito solía tener alguna ventaja sobre los demás, sea por recibir el doble que los restantes hermanos, sea porque alcanzaba una parte mayor que los otros o por la posibilidad de elección entre las tierras repartidas, mientras a los demás se les asignaba una parte por sorteo. Todo ello se encuentra en interesantes tablillas donde se reflejan repartos hereditarios que implican la utilización de procedimientos geométricos y algebraicos.

El rey

La estructura social mesopotámica fue, desde muy pronto, jerárquica, colocándose el rey en la cúspide de la pirámide social. Es por ello que una adecuada descripción del marco social requiere examinar su figura desde varias perspectivas. En primer lugar, la razón de su nacimiento y asentamiento; en segundo, las funciones que ejercía en lo que ello tenga relación con el propio concepto que tenía su pueblo de la importancia que se le concedía, en tercer lugar, la relación que establecía el rey con el otro poder de la época, el religioso.

Ya se ha comentado que, en los tiempos arcaicos, las decisiones cotidianas debían ser tomadas por un consejo de ancianos en una forma de democracia primitiva. La elección de un hombre que llevase la autoridad de todos sería una cuestión puntual, limitada en el tiempo, revocable y sólo justificable por la presencia imperiosa de un peligro. Así, se encuentra en el poema "Gilgamesh y Agga de Kish" la petición reiterada de acción por parte del rey Gilgamesh ante el consejo:

> *"Los enviados de Agga, el hijo de Emmebaraggesi, partieron de Kish (para presentarse) ante Gilgamesh, en Uruk.*
> *El señor Gilgamesh ante los ancianos de su ciudad puso la cuestión (y les) solicitó (su) consejo: Para terminar los pozos, para terminar todos los pozos del país, para terminar los pozos (y) las concavidades pequeñas del país, para ahondar los pozos, para completar las cuerdas que se amarran, no nos sometamos a la casa de Kish, ataquémosles con las armas" (Lara, 1984, p. 129).*

Sin embargo, la necesidad de poner de acuerdo a un grupo numeroso de ancianos y abocarles a la acción inmediata no debía ser tarea fácil y traería como consecuencia una tensión creciente entre el rey elegido y el consejo, que podría desembocar en la asunción del poder absoluto por parte del primero. En la Epopeya babilónica de la creación se puede observar una situación análoga en el terreno de los dioses cuando, amenazados por el Caos, la comunidad divina se dirige a uno de los más jóvenes de entre ellos, Marduk, quien reclama poder absoluto:

> *"Si he de ser vuestro defensor, vencer a Tiamat, y salvaros, entonces reuníos y proclamad mi lote supremo.*
> *Sentaos juntos con alegría en Ubshu-ukkina, dejadme, como vosotros, determinar el destino por la palabra de la boca. A fin de que lo que yo decida no sufra alteración; y la orden dada no vuelva (a mí), ni se cambie"* (Frankfort 1998, p. 242).

El término habitual empleado en sumerio para el rey *(lugal*) no es algo específico de situaciones determinadas sino que parece extenderse a los gobernantes de cualquier ciudad e incluso aldea. Sólo con el tiempo adquiriría el rango e importancia con el que ha pasado a la historia de aquella cultura. Es indudable, no obstante, que la necesidad de acciones constantes a medida que las ciudades estado combatían entre sí aconsejaba que el cargo no fuera temporal sino permanente. Tras el imperio sargónida la creación de un estado complejo de múltiples intereses, fuerte administración, necesidad de mantenimiento ante las agresiones exteriores, la posibilidad de ampliación territorial con la que garantizar las vías comerciales, entre otros motivos, excluyeron cualquier temporalidad real para hacer de él un cargo fundamental dentro de la estructura social del gobierno.

Respecto a las funciones efectivas del rey hay que aclarar que, en muchas ocasiones, es indistinguible su actuación de la de aquellos en quien delega. Así, en el palacio numerosos funcionarios impartían instrucciones que no se sabe si provenían directamente del rey o eran simplemente funciones delegadas. Por otro lado, Mesopotamia fue una sociedad fuertemente fragmentada hasta el primer milenio. Existían ciudades con una gran autonomía que seguían gozando de ella incluso ante la preponderancia de un determinado imperio, sea acadio, babilónico o asirio. En algunos casos, el poder real colocaba en el gobierno de la ciudad a un delegado suyo (*ensi*) pero en muchos otros se les permitía regirse del mismo modo que anteriormente sin más que pagar unos tributos y garantizar el orden en su zona, así como el tránsito pacífico de las caravanas comerciales.

Alguna idea más concreta del significado del papel real puede obtenerse de las imágenes que tenía el pueblo mesopotámico y las clases más pudientes a través de la literatura laudatoria tan frecuente en toda esta cultura.

Siendo una sociedad de naturaleza tribal en su origen, agrícola y ganadera, es inevitable que dos conceptos del rey aparezcan repetidamente en los escritos: El rey como patriarca y como buen pastor de su pueblo (Sanmartín y Serrano, 1998). La noción de patriarca es quizá la primera. Téngase en cuenta que, tras una vida nómada o seminómada, las macrofamilias se ven desarticuladas con la creciente organización en ciudades y ante la presencia de un poder jerarquizado. Para compensar esta situación de pérdida, el rey adopta la figura paternalista del patriarca. En este sentido, el instrumento esencial para reafirmar este concepto real será el edicto de anulación de deudas que alivia de manera notable la pobreza de los desheredados y suele estar presente en el comienzo de cada reinado.

La imagen de pastor, sin embargo, no es una adquisición tan temprana como pueda parecer. De hecho, los reyes sumerios y acadios se presentaban ante su pueblo, sobre todo, como buenos administradores. Sólo en tiempos babilónicos, cuando los amorreos, una tribu esencialmente ganadera, se hace con el poder, es cuando el concepto del rey como buen pastor se extiende. Ello supone una imagen de un rey protector y justo, que defiende al débil y desamparado frente al fuerte y poderoso.

Figura 2

Así debe interpretarse uno de los códigos legales más famosos, el del rey babilónico Hammurabi (figura 2). Su defensa sistemática de la ley del Talión que defiende el pago frente al daño, el ojo por ojo y diente por diente, debe entenderse en el contexto de la época. Este código unifica y da rango escrito a las costumbres preexistentes. En ellas se intentaba proteger al débil frente al daño causado por el más fuerte dentro de una sociedad sin más reglas que las de la supervivencia del más fuerte frente a la debilidad del rival. Así, el rey se erige en una figura justa y protectora que garantiza con su fortaleza precisamente, que el más fuerte no podrá oprimir al débil sin responder de sus acciones sufriendo el mismo daño que puede infligir.

Así dice Hammurabi:

> *"Los Grandes dioses me eligieron:*
>
> *Yo soy el pastor salvífico, cuyo cayado es justo. Mi sombra benéfica se ha extendido sobre mi ciudad; en mi regazo he acogido a los habitantes de Sumer y Akkad: ellos han prosperado bajo la guía de mi diosa patrona; yo los guié; en mi sabiduría, yo les di cobijo"* (Sanmartín y Serrano, 1998, p. 61).

Sin embargo, el pueblo reclama algo más de su rey. En concreto, la actividad real debe garantizar el flujo de mercancías, las actividades comerciales de venta de productos gracias a la adquisición de materias primas, en suma, la estabilidad interna suficiente para continuar las actividades habituales del pueblo mesopotámico. A ello ha de unirse el mantenimiento de un nutrido grupo de personas que viven directamente en el palacio (funcionarios, escribas, sacerdotes, etc. que reciben sus raciones) o que indirectamente se benefician de su actividades (suministradores, agricultores, comerciantes, por ejemplo). Por otro lado, uno de los títulos que se le asignan con cierta frecuencia tiene que ver con el rey como "ensanchador del país", es decir, encargado de extender el poder del pueblo que se acoge bajo su amparo.

Finalmente, el rey parece haber tenido como una de sus funciones principales la de cuidar el culto divino, del que era el sumo sacerdote. Ello comprendía levantar templos a los dioses, poner en práctica su culto y realizar las ofrendas que garantizasen el favor divino y, con él, una cosecha abundante, la tranquilidad y prosperidad para el pueblo. Una de las primeras manifestaciones de la presencia de reyes, precisamente, es su mención en cuencos de piedra que servían para realizar las ofrendas del culto. Así, el primero en tener una noción de imperio, el rey Lugalzagesi de Uruk, hace inscribir en un vaso de ceremonia:

> *"Lugal-zagesi, Rey de Uruk, Rey del País... hizo grandes ofrendas en Nippur a Enlil su rey, y le hizo libaciones de agua dulce.*
> *Si Enlil, Rey de todos los países, dijera una oración por mí a An, el padre que lo ama, y añadiera vida a mi vida, entonces el País se encontrará (satisfecho) en sus praderías bajo mi mando, entonces seguramente la humanidad se extenderá como hierba, la ubre del cielo funcionará adecuadamente, el País estará cómodo bajo mi mando. ¡Que (los dioses) no revoquen el favorable destino que han decretado para mí! ¡Que siempre yo sea pastor...!".* (Postgate, 1999, p. 51).

El rey y los dioses

Ya se ha comentado el hecho de que, según la tradición sumeria, el consejo de dioses confió en uno concreto, Marduk, para que les uniera a todos ellos defendiéndoles del ataque del Caos. Desde ese punto de vista, la realeza no es natural a los hombres sino un cargo que los dioses conceden. Como afirma la "Lista real sumeria", la realeza es algo que bajó del cielo (Sanmartín y Serrano, 1998). Así pues, la autoridad, la legitimidad en tal puesto, proviene siempre del favor de los dioses que al igual que lo otorgan a un hombre pueden concedérselo a otro. De este modo, el rey mesopotámico siempre habrá sido elegido por los dioses y, por tanto, pertenece a la única dinastía legítima. Ello obligaba a que, cuando alcanzaba el trono un hombre de oscuro pasado, como fue Sargón al vencer a Lugalzagesi, se viera obligado a demostrar a través de una relación detallada cuál era su origen. Habitualmente, el antecedente más antiguo se hacía irrebatible al adjudicárselo a algún héroe mítico de imposible comprobación. Inmediatamente, esto comportaba que la dinastía derrocada era ilegítima y por tanto merecedora de la derrota.

En los tiempos protodinásticos se utilizaban los términos "amado" o "hijo" de los dioses para referirse a los reyes aunque ello no comportaba filiación alguna ni una naturaleza divina de los mismos. Los reyes eran hombres que ostentaban un cargo de naturaleza divina pero lo era el cargo, no ellos. Por eso el favor de los dioses podía cambiar si el rey olvidaba el favor concedido, si no llevaba el culto adecuadamente o no respondía a sus deberes como debía. El hecho de que se era rey por la gracia de los dioses se ve reflejado perfectamente en el himno que Lipit-Istar, rey de Isin, se dedica:

> *"Soy el hijo amado del divino Enlil; en su templo Ki'ur me entregó el cetro. Soy la delicia de la divina Ninlil; en su templo Gagissu'a me fijó un buen destino...*
> *Yo soy aquél a quien el divino Luna (nanna) miró con cariño; él me habló amistosamente en Ur...*
> *Yo soy aquél a quien el divino Enki abrió el oído; él me entregó la realeza en Eridu"* (Sanmartín y Serrano, 1998, p. 59).

Sin embargo, es necesario destacar que hubo algunos que parecen haberse arrogado dicha naturaleza divina, al modo en que los faraones de Egipto se transformaban en dioses a su muerte. Este es el caso de Naram-Sim de Akkad o del rey Sulghi de Ur III. Sin embargo, los datos son algo incompletos y no se puede afirmar con total certeza su defensa de la divinidad del rey.

Habitualmente, los dioses venían precedidos en su denominación de un signo cuneiforme. Además, en la iconografía se les representaba con una tiara provista de cuernos a lo que hay que añadir, claro es, que se le rendía culto en los templos. En la estela de la victoria de Naram-Sim (figura 3) aparece el rey de gran tamaño y ostentando el símbolo divino de una tiara con cuernos. Además, se lee en una inscripción:

> *"Puesto que él colocó los cimientos de su ciudad bajo amenaza, su ciudad lo solicitó como dios de su ciudad Akkade, de Istar en Eanna, de Enlil en Nippur, de Dagan en Tuttul, de Ninhursag en Kes, de Enki en Eridu, de Sin en Ur, de Samas en Sippar (y) de Nergal en Kutha, y construyó su tempo en Akkade"* (Postgate, 1999, p. 318).

Se cita así incluso la construcción de un tempo a él dedicado. Sin embargo, ha de observarse que su divinidad sólo se refiere a constituirse en dios de una ciudad, algo así como garante de su bienestar y esplendor. En el caso de Sulghi parece existir también el culto al mismo rey y su nombre se menciona repetidamente en el lugar habitual de los dioses. Incluso en una inscripción llega a autotitularse “dios del país”, pero sin embargo su iconografía le representa de forma humana sin los atributos divinos.

Figura 3

Por todo ello puede pensarse que la divinización de los reyes tuvo una naturaleza muy concreta con la que garantizarse la tutela sobre todo el territorio mesopotámico o sobre algunas ciudades. Incluso se puede afirmar que estos intentos de divinización real fueron esporádicos y no terminaron de hacerse definitivos ni duraderos. El rey, por tanto, fue siempre un hombre elegido por los dioses para llevar a cabo las funciones antes reseñadas pero que no compartía la naturaleza de estos dioses, siempre inaccesibles a los hombres.

Los dioses y los hombres

Una de las obligaciones del rey, en tanto disfrutaba de una comunicación privilegiada con los dioses, era la de interpretar sus deseos e intenciones. Todo ello no lo hacía de modo directo, ya que no compartía la misma naturaleza que ellos, sino mediante la interpretación de los signos que ofrecían. Estos signos estaban en la naturaleza por cuanto éste era el hogar de los dioses. Había pues que observar señales muy variadas, el movimiento de los astros, alteraciones en el cauce de los ríos, el vuelo de los pájaros, etc. Naturalmente, como pasaba con el culto diario, esta labor no era siempre ejercida por el rey en persona sino que había de delegar estas funciones en un grupo de sacerdotes.

> *"Al rey mi señor, tu siervo Balasi: saludos al rey mi señor. Que Nabu y Marduk bendigan al rey mi señor.*
> *En cuanto a lo que el rey escribió, 'Algo está sucediendo en los cielos: ¿te has dado cuenta?'. En cuanto a mí respecta mis ojos están fijos. Yo pregunto: '¿Qué fenómeno he dejado de ver (o) de comunicar al rey? ¿He dejado de observar algo que no pertenece a su destino?'. En cuanto a la observación del sol acerca de lo que el rey mi señor escribió -éste es el mes para observar el sol, lo vimos dos veces: el 26 de Marheshran (y) el 26 de Kislev, conseguimos observarlo. De este modo conseguimos observar el sol durante dos meses. En cuanto a ese eclipse de sol del que habló el rey, no ha habido eclipse. El 27 miraré de nuevo y presentaré (un informe). ¿Para quién teme desgracia el rey mi señor? No tengo información alguna".* (Frankfort, 1998, p. 275).

La relación de los mesopotámicos con sus dioses está presidida por la incertidumbre. Los dioses no se sujetaban a razón humana alguna y, por tanto, eran difíciles de prever en sus comportamientos. Ello no significa que fueran caprichosos sino que resultaban incomprensibles. La única manera de prever la desgracia que un dios preparaba sobre una persona o un pueblo era mediante la interpretación de signos, la adivinación de los mismos. Si los augurios dictaban que una desgracia caería sobre el país, crecía la incertidumbre. Podía ser que el rey hubiera faltado a alguno de sus deberes ceremoniales pero también podía tratarse de un ataque contra su persona por parte de un dios malintencionado en cuyo caso, la obligación del pueblo era proteger al rey. Se utilizaban en tales casos complicados ceremoniales donde el rey podía ayunar muchos días, o bien celebrarse actos en torno a una estatua real o su manto. En caso extremo se llegaba a colocar durante cien días un rey "de repuesto" mientras el verdadero se ocultaba. Al cabo de ese tiempo y, con grandes honores, el rey falso era sacrificado a los dioses y el verdadero volvía a tomar los símbolos reales de su mando.

Hay dos aspectos que señalar en esta vertiente social de la relación del mesopotámico con los dioses que ya han sido apuntados líneas arriba. En primer lugar, la interpretación de signos y, en segundo, la protección de las personas ante los ataques de un dios. Respecto a esto último, sólo cabe mencionar la importancia de la magia y los conjuros en la mentalidad oriental antigua por cuanto se sometía a la persona en peligro a complicados rituales. Sin embargo, lo más importante en el estudio presente es la interpretación de signos.

Como se ha comentado, se pueden interpretar signos de la naturaleza. En lo que se refiere a la observación de los astros, ello está en la base de la confección de listas detalladas de los movimientos astrales y en una naciente e importante astronomía. Sin embargo, si la naturaleza no proporciona los signos oportunos ello no significa que un ataque divino no esté en marcha. Debido a esta nueva incertidumbre el mesopotámico era partidario de estimular la producción de signos mediante algunas acciones propias. El procedimiento más conocido era las extispicina o análisis de las vísceras de animales sacrificados en las ofrendas a un dios. De entre ellas el análisis del hígado era la preferida (hepatoscopia):

"*Al rey mi señor, tu siervo Adad-shum-usur:*

Saludos al rey mi señor, que Nabu y Marduk bendigan al rey mi señor.

Todo está bien por lo que respecta a los dignatarios del palacio posterior. En lo concerniente a la vesícula biliar de lo que escribió mi señor, '¿Está torcida?'. El firme lóbulo del hígado estaba doblado. La vesícula biliar había caído abajo. Esta posición no es favorable. Lo que tendría que estar arriba estaba colocado abajo. Durante dos días un líquido salía (de ahí). Es una buena señal. ¡Anímese el rey!" (Frankfort, 1998, p. 277).

En todo caso, el sacerdote examina todos estos signos como presagios del peligro que ha de venir. Dada la importancia de los asuntos en juego el examen es muy detallado y comporta la actividad continuada de numerosas generaciones. Así, se encuentran tratados de considerables proporciones, particularmente a lo largo del primer milenio, tanto sobre este análisis de las vísceras como sobre la lecanomancia o interpretación de las formas que dejan las gotas de aceite sobre un tazón de agua, la de los sueños, de considerable importancia, sobre todo si el que soñaba era el rey. Así se fueron redactando listas de grandes proporciones sobre la posición de los astros así como sobre el significado de la misma. Como para las demás técnicas, los resultados siempre se presentaban bajo la fórmula "Si..., entonces..." que no representa una relación de causalidad entre una cosa y otra, desde luego, sino una relación de signo y significado.

> *"Si el día tercero (se observa) una penumbra lunar por ambos lados: los reyes permanecerán lejos.*
> *Si (la penumbra) se hace visible tres veces seguidas mes por mes: habrá nubes, caerá la lluvia.*
> *Si una estrella cae el día treinta: el rey no conseguirá atrapar a su enemigo*".
> (Sanmartín y Serrano, 1998, p. 95).

Capítulo 3
Marco económico

El templo

Los centros de decisión administrativos y económicos fueron el templo y, poco después, el palacio. En el primero habitaba el dios de la ciudad y en el segundo vivía el rey. Antes del período protodinástico se observa frecuentemente la presencia de construcciones con elementos no domésticos. Tal es el caso de las excavaciones en la ciudad de Eridú, donde se han hallado nichos decorados, restos de ofrendas (huesos de pez) y un altar donde podría estar la estatua o representación del dios del lugar. En el tercer milenio va destacándose un tipo de construcción realizado sobre terrazas al objeto de destacar su presencia, por un lado y, a niveles prácticos, alejar su contenido de las inundaciones y del barro que eventualmente ocupaban el suelo de la ciudad.

Figura 4

En los tiempos de la III dinastía de Ur se construyeron varias terrazas superpuestas de forma que en la superior se disponía el templo dedicado al dios de la ciudad (figura 4). Desde ese momento y durante un milenio y medio, toda Mesopotamia adoptará este tipo de construcción poblándose el país de lo que se ha denominado zigurates. Cuando alcanza la complejidad dada por un diseño escalonado ya no pretende simplemente aislar el templo en la cúspide para protegerlo de la inundación, sino que responde a una idea espiritual por la cual el templo ha de acercarse al cielo de modo que el encuentro entre el dios y el hombre sea facilitado.

> *"Los nombres que se han dado a esos monumentos (Casa de la Montaña, Casa del Universo, Casa de la Montaña que sube hacia el cielo,...) recurren a un simbolismo cósmico que se apoya en una división binaria del mundo: arriba, el cielo engendrado y habitado por Anu, abajo, la tierra fundada por Ea (o Enki) que reside en las aguas primordiales (el apsu) sobre las que descansa la tierra. El zigurat aparece como una materialización del centro del mundo donde se realiza la conexión entre las esferas terrestre y celeste"* (Margueron, 1996, p. 374).

El templo era la casa del dios para los mesopotámicos, no un lugar de culto. No se acudía a él en masa para implorar favores o descubrir designios, sino de forma individual y privilegiada para realizar ofrendas o consultar a los sacerdotes sobre los signos de los dioses al examinar las entrañas de los animales. Era, en suma, la reserva espiritual de la ciudad, lugar donde un grupo específico de personas (los sacerdotes) rendían culto con el propósito de que el dios favoreciera a la ciudad y sus habitantes.

Las ofrendas eran en forma de alimentos (pan, harina de escanda, cerveza, pasteles, vino) pero también de objetos preciosos. Las primeras servían para ser redistribuidas proporcionalmente entre los miembros del templo y los segundos suponían que el templo se constituía en un centro de riqueza que daba seguridad a los habitantes de la ciudad aunque, al mismo tiempo, constituyera una atracción para cualquier invasor. Por ello, las incursiones hititas en Babilonia, en un momento determinado, se convirtieron en una auténtica tragedia para los habitantes de la ciudad, tanto por el secuestro de las imágenes divinas (y por tanto, el alejamiento de los dioses protectores) como por el robo de toda la riqueza depositada en sus arcas. En los tiempos de enfrentamientos entre las ciudades estado, por ejemplo, se afirma respecto a los templos de la ciudad de Lagash:

> *"El jefe de Umma... saqueó el templo de Bagara y se llevó sus metales preciosos y el lapislázuli; incendió el templo de Drugu y saqueó sus metales preciosos y lapislázuli...*
> *En los campos de Ningirsu, cualquiera que estuviera cultivado, destruyó la cebada".* (Postgate, 1999, p. 151).

Sin embargo, el templo también fue, durante toda la historia mesopotámica, un centro administrativo y económico fundamental. Sus actividades se mantienen en general constantes a lo largo de la historia mesopotámica: cultivos, control de los riegos, gestión del ganado y la pesca, elaboración de productos textiles y metalúrgicos, administración de la actividad de mercaderes y comerciantes (Postgate, 1999). Tan sólo el palacio real ostentaba unas competencias semejantes que fueron creciendo con el tiempo en detrimento del templo. No obstante, hay que aclarar desde el principio que no puede entenderse la relación entre uno y otro como de competencia o rivalidad. El rey era la figura autorizada y protegida del dios. A cambio, como sumo sacerdote del mismo, estaba obligado al culto y el mantenimiento del nutrido grupo de sacerdotes y funcionarios que sostenían la actividad religiosa. A esta disposición jerárquica no era extraño añadir el hecho de que algunos funcionarios palaciegos, parientes o no del rey, ostentaban puestos representativos en ambos recintos, bien directamente o en forma de prebendas, derechos que se podían heredar, vender o arrendar incluso, y que garantizaban una relación estrecha entre los intereses del templo y del palacio.
El personal del templo era básicamente de tres tipos:

1. Sacerdotes, adivinos, que estaban encargados del culto: colocar las ofrendas al dios, cuidar sus estatuas, llevar a cabo los ritos ceremoniales.
2. Administrativos, como el supervisor, contables, tesoreros, coperos, escribas, etc. que se dedicaban a las tareas correspondientes.
3. Artesanos, como el molinero, el trabajador del cobre, tejedor, etc. que garantizaban la elaboración de las materias primas a nivel doméstico. A ellos habría que unir un nutrido grupo de trabajadores como el barbero, los porteros, limpiadores, guardias, cuyo trabajo resultaba imprescindible.

El templo era considerado, no sólo como la casa del dios local, sino como el lugar más seguro en el que almacenar el grano necesario en épocas de sequía y las materias primas (madera, minerales) de necesario uso posterior. Además, el nutrido grupo de personas encargadas de su funcionamiento debían recibir sustento en forma de alimentos y otros productos. Ello hacía del palacio un centro económico de primera importancia donde, además de la sala reservada al dios, se debían incorporar talleres artesanales, almacenes. Para garantizar el sustento y productividad propias, el templo era propietario de tierras que le rendían fruto de formas diversas:

1. Había tierras reservadas al dios de manera que todo lo producido por ellas venía destinado al culto divino y pago de raciones para todos aquellos que dieran servicio al templo.
2. Los campos de prebendas se reservaban para el cultivo directo de los sacerdotes y administradores más importantes de la institución.
3. Los campos de cultivo eran tierras arrendadas a población campesina de modo que se recibiera de ellas una parte de lo producido.

Esta distribución fue, en mayor o menor medida, respetada a través de la historia mesopotámica aunque controlada fuertemente por los intereses reales que hacían surgir, en torno a su propia casa, una estructura similar, la del palacio.

El palacio

Si en los tiempos más arcaicos los restos arqueológicos de las viviendas muestran una igualdad en su trazado, llega un momento en que esto no es así y hace su aparición la casa tripartita. En ella, a la estructura doméstica inicial se van añadiendo estancias que, previsiblemente, servían de almacenes. Esto muestra una diferenciación social que va acusándose hasta llegar a la construcción de complejas casas de múltiples habitaciones, almacenes, talleres con sus hornos y, en general, una disposición que da a entender la presencia de unas funciones regias. El primer ejemplo constatable se sitúa en Kish donde dicha construcción aparece separada del resto de casas por un muro defensivo.

Los palacios llegan a tener múltiples actividades y funciones, a medida que el poder del rey se consolida y la administración de sus territorios queda centralizada. Durante largos períodos de tiempo la actuación real es cotidiana y alejada de los enfrentamientos bélicos. Es entonces cuando queda en evidencia la triple actividad económica de la casa del rey:

1. En primer lugar, administrar las posesiones agrícolas que siguen una estructura semejante a la del templo.
2. Después, albergar las industrias artesanales (talleres) que son necesarias en la elaboración de las materias primas que necesita.
3. Finalmente, organizar las empresas comerciales necesarias para la obtención de dichas materias primas.

El palacio, como casa del rey, es también el principal centro de decisión y distribución económicas de Mesopotamia. Su estructura está formada por patios y salas cuyo acceso encierra cierta complejidad e indica que había estancias reservadas y no fácilmente accesibles. En general, las distintas partes que pueden encontrarse en un palacio serían las siguientes:

1. La residencia del rey y sus familiares, normalmente apartada para garantizar su privacidad, con algunas habitaciones de ocupación femenina en exclusiva.
2. Salas para actividades ceremoniales entre las que se cuenta como principal el salón del trono, un lugar reservado para recibir a personajes de importancia y recibir sus obsequios. Normalmente cuenta con un asiento especial y una cierta profusión de riqueza ornamental a través de la cual el rey mostraba la importancia de sus posesiones.
3. Habitaciones para realizar actividades artesanales y domésticas, generalmente presididas por hornos, cuyos restos han sido encontrados sistemáticamente en los palacios. En el de Mari, por ejemplo, vivían y trabajaban más de mil personas, lo que suponía la realización de una cantidad importante de comida tanto para ellos como para los visitantes eventuales.

4. Centros de administración donde se almacenaban los materiales que permitían a los escribas registrar las actividades reales y comerciales del lugar. Habitualmente tenían que acudir allí donde estuviera el rey para escribir de pie sobre tablillas de arcilla fresca los mandatos y órdenes del mismo. No obstante, era necesario almacenar y registrar estas tablillas en lugares que con el tiempo han mostrado a los arqueólogos todo su contenido.
5. Almacenes, donde se depositaban las materias primas destinadas al alimento y el comercio tanto para el consumo directo como para la distribución e intercambio con los mercaderes que acudían a los palacios.

En líneas generales, los templos y palacios, como organizaciones comunes, mostraban un cúmulo de ventajas organizativas en el trabajo del pueblo mesopotámico, no sólo por la importancia política y el control militar del territorio, sino por una serie de ventajas económicas frente al campesinado agrupado en aldeas o las tribus seminómadas repartidas por el campo. Se verá más adelante que determinadas obras, como la construcción de reguladores del cauce fluvial o la construcción de canales de irrigación de los campos, cuando son de cierta envergadura, son realizables solamente por este tipo de organizaciones. Además, cuando se cuenta con material en común (animales de tracción, arados, hoces con el borde de sílex, material de difícil obtención), las labores agrícolas resultan más rentables. A ello hay que unir que un pequeño agricultor tendrá muchas dificultades para dejar en barbecho parte de su reducido campo lo que puede conducir, en caso de que no pueda hacerlo así, a su empobrecimiento y finalmente a su abandono. La consideración de grandes campos permite dejar parte de él en barbecho sin merma de la productividad necesaria.

Estructura de las relaciones económicas

En torno al templo y el palacio e, incluso independientemente de ellos, se gestan numerosas relaciones económicas entre los distintos sectores e instituciones de la sociedad. Muchas de sus peculiaridades y características estarán presentes con mayor detalle en los capítulos posteriores pero, llegados a este punto y con la mayoría de los protagonistas presentes, conviene esbozar a grandes rasgos cuáles son las principales relaciones económicas, los distintos sectores sociales que las establecen y algunos de los mecanismos primordiales para ello.

El eje vertebrador de la economía, desde el punto de vista funcional, es el templo primero y el palacio después, cuando este último se hace cargo progresivamente de las tareas del primero y lo integra en su propia estructura económica como un elemento más, aunque de enorme importancia. De este modo, palacio y templo formarán una unidad que dinamiza las relaciones establecidas dándoles el sustento religioso, el fundamento político y los medios económicos necesarios.

El elemento básico sobre el que se construyen las relaciones económicas es la tierra mesopotámica. Es por ello imprescindible recordar lo expuesto líneas arriba sobre las distinciones en su propiedad:

1. Había tierras reservadas al dios de manera que lo producido en ellas venía destinado al culto divino y pago de raciones para todos aquellos que dieran servicio al templo.
2. Los campos de prebendas se reservaban para el cultivo directo de los sacerdotes y administradores más importantes de la institución. Estos dos tipos de tierra necesitaban mano de obra que se escogía muchas veces entre el campesinado empobrecido. Existían otros arreglos posibles. Así, muchos de estos campesinos libres socialmente se veían obligados a pedir créditos hasta la siguiente cosecha, créditos que eran otorgados por el templo directamente o por algunos de sus funcionarios. Además de la devolución de los mismos muchas veces se incluía la obligación por parte del campesino de recoger la cosecha de los campos de los prestatarios. Con ello se paliaba la frecuente escasez de mano de obra.
3. Los campos de cultivo eran tierras arrendadas a población campesina de modo que se recibiera de ellas una parte de lo producido.

Los arriendos, que se extendían habitualmente por dos o tres años, podían suponer hasta la mitad de la cosecha para el propietario pero habitualmente consistía en la tercera parte. De esta manera, tanto unos como otros obtenían una compensación, sea de la propiedad, sea del trabajo efectuado.

El binomio templo/palacio proporcionaba a sus trabajadores, sean funcionarios, administrativos o personal ayudante, el sustento necesario para su manutención. En la época de Ur III, por ejemplo, se trataba de cebada (distribuida cada mes), lana y aceite (de reparto anual), elementos fundamentales en la dieta y vida cotidiana de la época. Estas raciones eran repartidas muy desigualmente según la importancia del trabajador. Mientras una tejedora podía recibir un máximo de 60 litros de cebada al mes, un escriba llegaba a tener un máximo de 300 litros y el capataz de una explotación agrícola hasta 1.200 litros al mes (Sanmartín y Serrano, 1998). Los trabajadores contratados en los campos recibían directa o indirectamente (en los campos de prebendas) del templo las raciones oportunas. De este modo el palacio/templo repartía sus ganancias en productos agrícolas y ganaderos quedándose con una parte importante de las mismas, sea directa (en los campos del dios) o indirectamente (al no repartir mayores raciones a los propietarios de los campos de prebendas).

Otro tanto sucedía en el caso de los artesanos, tanto los que trabajaban en el templo como fuera de él. Recibían las materias primas o bien de los mercaderes independientes o, más frecuentemente, de los que trabajaban para el palacio y templo. Con estas materias (cobre, sílex, etc.) elaboraban los productos manufacturados que daban al templo a cambio de sus correspondientes raciones o bien los intercambiaban por grano u otros materiales necesarios en el mercado de la ciudad.

Al tiempo, el templo fundamentalmente recibía una serie de ofrendas que volvían a constituir raciones al ser repartidas entre sus trabajadores. Muchos de los contratos entre campesinos, comerciantes y mercaderes se realizaban al amparo del templo, poniendo al dios como testigo del acto y del resarcimiento de las deudas contraídas. Esto motivaba la obtención de distintas ofrendas y regalos al dios que venía a incrementar la riqueza del templo, disponible siempre para el rey en caso de necesidad.

Por último se ha de contar, aunque ya han sido mencionados, con los mercaderes. Como los artesanos, su trabajo es en cierta forma independiente del palacio pero lo cierto es que las relaciones que establecen son fundamentalmente con él. De este modo, sin llegar a ser funcionarios del mismo sí pueden considerarse elementos estrechamente vinculados. En muchas ocasiones, sólo el poder del palacio podía garantizar la viabilidad de determinadas rutas comerciales, la adquisición de todos los productos traídos en las caravanas. Sólo el templo y el palacio podían encargar para sus talleres y su importante ornamentación muchos de los productos de los que era carente Mesopotamia (madera, determinados minerales). Así pues, hay una relación privilegiada entre el palacio/templo y los mercaderes aunque estos no son estrictamente trabajadores del mismo y las raciones que reciben no son sistemáticas sino en función de los productos obtenidos.

Todas estas relaciones pueden disponerse gráficamente de un modo resumido, tal como se presenta en la figura 5.

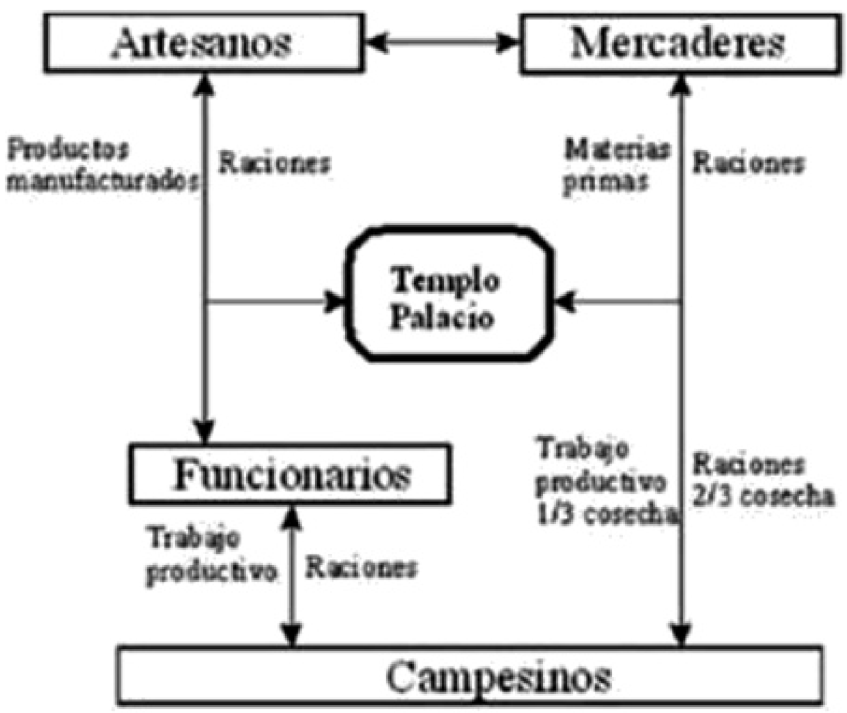

Figura 5

Agricultura

La agricultura en la tierra mesopotámica está ligada a los dos ríos que la presiden. Ya se ha comentado la distinta productividad esperable en el norte, más seco, respecto del sur, donde los cauces se desbordan con facilidad extendiéndose por los márgenes y creando, particularmente en tiempo de crecida, numerosos brazos fluviales. Esto es así porque las lluvias son considerablemente escasas en la mayor parte del territorio: En las nueve décimas partes del Próximo Oriente se registran menos de 100 mm de lluvia al año, cantidad correspondiente al terreno desértico (Margueron, 1996).

Este aporte pluviométrico se reparte desigualmente en Mesopotamia. Mientras en las montañas del norte (montes Tauro, estribaciones de los Zagros) la lluvia anual puede alcanzar los 600 mm., al descender hasta los valles fluviales baja bruscamente a 200 mm que resulta ser el máximo en su cuenca. Hacia el oeste y el sur de estos puntos el terreno ya es plenamente desértico.

El Éufrates y Tigris no colaboran en demasía con la agricultura de la zona norte. Su crecida tiene lugar entre los meses de abril y mayo, cuando se funden las nieves en las montañas donde se originan, y es una crecida tumultuosa protagonizando numerosas inundaciones a medida que su curso le acerca al sur. Ello causa dificultades crecientes en el deseo muy antiguo de esta civilización de encauzar sus aportaciones ordenadamente hacia canales de irrigación que, por lo dicho, pueden quedar anegados con suma facilidad. Por este motivo, probablemente, se impuso en el sur la necesidad temprana de coordinar esfuerzos para construir canales y controlar las crecidas.

Las labores agrícolas comenzaban en otoño, cuando se rompía el suelo que había estado en barbecho el año anterior y se regaba al objeto de comenzar la siembra poco después. Cebada, escanda y trigo candeal eran los principales cereales objetos de esta tarea. Además de los cereales se cultivaban legumbres (lentejas principalmente), cebollas, lino, ajo. Habitualmente se utilizaba un embudo colocado en la parte trasera del arado por el que iba cayendo con regularidad el grano sobre los surcos. Las labores agrícolas son objeto de mucha atención y cuidado. Se calculaba la cantidad de grano necesaria, la distancia entre los surcos más adecuada, las herramientas imprescindibles en esta tarea. En las "Instrucciones del Agricultor" que data de Ur III, se recuerda,

> *"Tus instrumentos deberían estar preparados, Las partes del yugo deberían estar unidas, Tu nuevo látigo debería colgar de un clavo listo para su uso; Vuelve a sujetar el mango de tu viejo látigo, Debería ser reparado por artesanos.*
> *La azuela, el taladro, y la sierra, tus instrumentos, deberían hallarse en buen estado.*
> *Que las correas trenzadas, las correas, los envoltorios de cuero y los látigos estén sólidamente unidos. Que tu cesto de plantar sea medido, reforzados sus lados. Todo lo necesario debería estar a mano. Inspecciona cuidadosamente tu trabajo."* (Postgate, 1999, p. 205).

A partir de ese momento era necesario asegurar un riego regular de los campos pero ahí comenzaban los problemas. El cauce fluvial en esta época es el más bajo del año y hay que esperar a primavera, cuando ya no es necesario, para que llegue a su nivel más alto. Esta disparidad entre los ciclos agrícolas y fluviales supone que es necesario aprovechar al máximo el agua que escasea desde otoño a primavera mientras que resulta necesario controlar debidamente las crecidas impetuosas después.

La recolección, finalmente, se realiza sobre el mes de mayo. Después de lo cual viene la trilla y el aventado de lo recogido para conducir el grano, inmediatamente después, a los almacenes oportunos, sean particulares o los propios del templo y el palacio.

Uno de los cultivos más populares en este tiempo fue el del sésamo, posiblemente introducido en Mesopotamia en tiempo de los acadios. Además de que su aceite se constituyó pronto en un elemento esencial de la dieta, gran parte de su éxito se debió a su ciclo de crecimiento. Se plantaba entre abril y mayo, poco antes de la recolección del cereal y su cosecha era en verano. De este modo se aprovechaba la mano de obra inoperante en este tiempo y que se ocupaba tan sólo, a la espera de la siguiente siembra, del mantenimiento de los canales de irrigación que los mesopotámicos construyeron en los márgenes de los ríos desde muy pronto.

En efecto, para asegurar el abastecimiento de agua en los campos todo el tiempo en que era necesario, se debían construir canales que extendían el curso del agua por gravedad. Ello quiere decir que se acometían dos acciones complementarias: La más elemental era abrir un agujero lateral en los márgenes para que el agua descendiera hacia los canales subsidiarios y estos, a su vez, lo repartiesen entre los distintos campos. La más compleja resultaba ser la construcción de "reguladores", es decir, construcciones generalmente de ladrillo que actuaban a modo de diques provisionales con los que detener el curso del río, elevar el nivel del agua y permitir de esta manera que ésta alcanzase los agujeros destinados a la comunicación con los canales. La construcción de un regulador, obra amplia y compleja, no era una tarea individual sino inevitablemente colectiva donde se hacía presente el llamado "inspector de canales", responsable del mantenimiento de los mismos y de la planificación y ejecución de las tareas relacionadas con la irrigación.

Para el máximo aprovechamiento de estos canales los campos se trazaban generalmente rectangulares y muy alargados, con el lado más corto sobre la acequia oportuna, de modo que se irrigase el mayor número posible de campos con la menos longitud de canales posible. Al mismo tiempo, esta forma tenía la ventaja al arar de que se minimizaba el giro del arado, siempre costoso de realizar.

Generalmente, los agricultores mesopotámicos realizaron una ingente tarea de construcción de canales de mayor o menor tamaño. Algunos de ellos se destinaron, no sólo al riego de los campos, sino al transporte fluvial. Pero durante mucho tiempo, hasta el primer milenio en concreto, no previeron cómo drenar los terrenos anegados por el agua sobrante. De este modo, el agua salía del cauce, corría por los canales, continuaba eventualmente por acequias más pequeñas y terminaba en los campos pero no se controlaba de manera suficiente como para impedir que quedasen muchas veces anegados durante largo tiempo. Dado que la evaporación es muy rápida debido a las altas temperaturas, se precipitaban las sales de tal manera que los campos resultaban empobrecidos.

Ganadería

El ganado más frecuente en toda Mesopotamia era, en general, compatible con la agricultura. Se trataba de ovejas y cabras (figura 6).

Figura 6

Su lugar de pasto solía ser los bordes de los campos cultivados, donde el agua sobrante lo hacía crecer en abundancia. Estos animales resultaban de un excelente aprovechamiento tanto para los ganaderos residentes en las montañas, que estacionalmente bajaban a los valles en busca de alimento para sus rebaños, como para los funcionarios, administrativos y, en general, las clases más pudientes en torno al templo y el palacio. La lana que producían era una materia prima de primer orden para la confección de tejidos, en concreto, vestidos, al tiempo que los productos lácteos constituían un elemento importante en la dieta del campesinado. Los propietarios de ese ganado que vivían en la ciudad tenían que contratar pastores de las aldeas para que cuidaran de los rebaños. Dado que no podían controlar su trabajo se solía llegar a un acuerdo que se ejecutaba tras el esquileo de los animales, en primavera. Este acuerdo consistía en determinar una tasa de productividad de animales considerando aquellos que habrían de nacer y de morir. Cualquier excedente de esta cantidad quedaba en propiedad del pastor, así como una parte de la lana que se producía y, generalmente, la leche. El propietario se garantizaba de esta manera una cantidad importante de lana, elemento de gran importancia económica hasta el extremo de constituir un material frecuente en la concesión de raciones.

Por contraste, el ganado vacuno (vacas, bueyes) presentaba características muy diferentes. Su alimentación era específica (cebada) y debía ser más abundante. Ello venía compensado por su aprovechamiento (productos lácteos y cuero, no tanto su carne) y por el hecho de que fueran una fuerza de tracción del arado especialmente adecuada. Con todo ello, sin embargo, el campesinado no solía disponer de un número crecido de estos animales si bien se han llegado a contabilizar por miles los registrados en los rebaños de templos y palacios. Sin embargo, como animales de tiro, este tipo de ganado no fue probablemente el primero ni tal vez el más utilizado. Ese lugar correspondería al asno y a un híbrido estéril entre él mismo y el onagro salvaje, frecuente en las estepas. Siendo desconocidos durante mucho tiempo el camello y el dromedario, el asno se constituyó en el animal más importante para cargar los productos de las caravanas de mercaderes, mucho más cuando se introdujo la rueda y el carro, permitiendo el mayor aprovechamiento de la fuerza de tracción de estos animales.

Los mercaderes

La población mesopotámica subsistía al recibir las raciones obtenidas directamente del templo y palacio o de algunos de sus funcionarios, propietarios de las parcelas arrendadas, incluso por el cultivo de sus propios terrenos. Una parte campesina empobrecida se ofrecía como mano de obra siempre demandada para el cultivo de los campos ajenos recibiendo las raciones correspondientes por ello. Sin embargo, otros grupos humanos se dedicaban a operaciones de comercio entre los distintos territorios del Medio Oriente.

Se ha comentado que Mesopotamia es una tierra carente de algunos productos fundamentales como la madera para la construcción de barcos o material de construcción, así como diversos productos minerales como el sílex, el cobre, lapislázuli, cornalina, etc. El palacio o el templo encargaban estos materiales, además de productos de lujo con los que adornar sus paredes y tesoros (joyas, armas, vasijas de lujo, muebles, alfombras, etc.). Sin embargo, sus funcionarios y administrativos no eran las personas adecuadas para obtenerlos de tierras lejanas y era necesario recurrir a los comerciantes.

Parece haber existido comercio desde la época arcaica. A partir de su base en Palestina, la civilización se fue extendiendo hacia el norte, la península de Anatolia y la zona siria para penetrar posteriormente en el norte de Mesopotamia. Allí se encuentran yacimientos de obsidiana, una piedra volcánica de enorme dureza que era muy útil para las hoces y cuchillos. Es probable que estos materiales fueran requeridos por los grupos humanos que empezaban a poblar el norte mesopotámico, lo que luego se constituirá como Asiria. En un poblado de esta zona, Yarim Tepe, se han encontrado almacenadas muchas muelas de molino realizadas a partir de una resistente piedra volcánica. Esta acumulación sólo puede indicar que se destinaban a su comercio entre una y otra zona.

En los tiempos de Uruk ya se registran actividades comerciales asiduas, siempre en relación con el palacio o el templo. Ello quiere decir que los mercaderes trabajaban por encargo de los templos y palacios, al objeto de satisfacer su demanda de materias primas de difícil obtención. Además, no es extraño encontrar transacciones donde el mercader pagaba en plata por productos en los que, en un momento determinado, el templo fuera excedentario. Lo interesante es que estos productos (lana, ganado vacuno, sésamo, por ejemplo, raramente cereal) aún no habían sido recaudados por el templo por lo que los mercaderes actuaban finalmente como cobradores de dichas deudas. Pese a todos estos datos que se deducen de la correspondencia y contratos encontrados en los archivos, se puede imaginar que los mercaderes trabajarían también por su cuenta, teniendo al templo o palacio como clientes preferenciales. Naturalmente, no quedarían testimonios de las transacciones individuales dado que las tablillas se han encontrado mayoritariamente en los archivos de estas instituciones.

En el sur hay rastros de un activo comercio con las tierras del Golfo Pérsico (para traer cobre desde Magan, por ejemplo) así como con el valle del Indo (en productos de lujo). Pero quizá una de las imágenes más completas de que se dispone sobre el comercio de la época corresponde al territorio asirio en el tiempo que media entre el debilitamiento de Ur III y la llegada de la tribu amorrea comandada por Shamsi Addad I.

Se han encontrado rastros de una actividad comercial intensa entre Asiria y la península de Anatolia. Caravanas de asnos debían marchar desde la primera hacia la segunda portando fundamentalmente estaño (procedente de las mesetas iranias y del que carecía Anatolia), necesario para obtener el bronce, y productos textiles cuya confección era excelente entre los acadios. Llegaban a ciudades como Kanish y allí se almacenaban los productos antes de su entrega. Se ha localizado una verdadera colonia asiria en las afueras de esta ciudad, casas de una arquitectura similar a las del país, utilizando la misma cerámica del entorno, pero con miles de tablillas que denotan transacciones, contratos y entregas de productos. El "*karum*" (muelle), tal como se conoce a este tipo de emplazamientos, disponía de su propia organización interna rigiéndose de forma conjunta por una asamblea de comerciantes presidida por un enviado de Asiria. Además, constituía el centro de una verdadera red de lugares menores en diversas ciudades anatolias.

Tras el intercambio de los productos que traían por oro y plata sobre todo, los comerciantes reemprendían el camino de vuelta hacia Asiria. En todos los pasos efectuados habían de abonar impuestos, tanto de las autoridades asirias como de las anatolias. Pese a que estas tasas podían alcanzar el 40 % del precio de los productos, el comercio debía ser suficientemente lucrativo como para que durara entre cuatro o cinco generaciones y fuera luego férreamente controlado por los nuevos gobernantes asirios. Así, por ejemplo, una tela que costara en Asiria entre 3 y 7 siclos de plata por unidad se podía revender en Anatolia a un precio entre 10 y 14 siclos cada una. Ello representa una ganancia sustanciosa y, al tiempo, como todo el comercio, un intercambio de monedas, cambios y transacciones presididos por una notable capacidad numérica.

Polanyi (1976) resume así las principales características del comercio en esta época, sobre todo a partir del examen del caso asirio,

1. *El elemento constitutivo era la adquisición de bienes situados a cierta distancia, el criterio de todo comercio auténtico. El abastecimiento de objetos útiles se producía de forma pacífica, con intercambio de productos...*
2. *Aunque actuaba dentro del marco de una organización gubernamental y una red de instituciones oficiales y semioficiales, el comerciante era un agente independiente...*
3. *No se podían prohibir las transacciones o tratos privados. La razón de ser de la "norma legal" pues, era la separación institucional de las disposiciones*

comerciales relativas a los negocios públicos con respecto a las transacciones privadas." (p. 72), para concluir: *"Este tipo de organización del comercio y los negocios fue, probablemente, única en la historia... Lo que parece ya claro es que, en contra de las ideas tradicionales, las actividades comerciales babilónicas no se desarrollaron originariamente en el marco de un mercado"* (p. 74).

Capítulo 4
Contabilidad y Numeración

Fichas y burbujas

Hasta finales del cuarto milenio no hay constancia escrita del transcurrir de la civilización mesopotámica. Sólo quedan restos arqueológicos y los registros posteriores para dar cuenta de sucesos y personas que los protagonizaron. La creciente urbanización que se registra en la segunda mitad de este cuarto milenio en la parte meridional de Mesopotamia provoca previsiblemente un aumento de los flujos comerciales al tiempo que una centralización política y administrativa. Ello conduce al almacenamiento creciente en el templo de diversas materias primas, ganado, grano, por ejemplo, así como productos manufacturados, que han de registrarse y para los cuales es necesario llevar una primitiva contabilidad.

De este impulso económico dan fe las numerosas tablillas escritas que se han excavado en la antigua ciudad de Uruk y que se datan en aquel tiempo. Prácticamente todas tienen naturaleza económica si se exceptúan algunas listas de profesiones y títulos, por lo que se puede afirmar que la escritura surge a partir de la necesidad de registrar los movimientos económicos y no desde el deseo de honrar a los dioses de manera literaria o establecer efemérides históricas. Así pues, los comienzos de la escritura y la notación numérica son prácticamente simultáneos.

Básicamente, se encuentran tres tipos de restos en las excavaciones realizadas en Uruk: Fichas, burbujas y tablillas. Dejando para un examen posterior las últimas, es necesario estudiar con cierto detalle la naturaleza y funcionalidad de las fichas (*tokens*) y las burbujas *(bulla).*

Las fichas son objetos de pequeño tamaño (entre 1 y 4 cm de longitud) y de múltiples formas que resultó frecuente encontrar en las excavaciones realizadas en la ciudad de Uruk. Durante muchos años los investigadores les dieron poca importancia tanto por su abundancia como en la creencia de que se trataba de amuletos o elementos pertenecientes a algún juego. Sin embargo, un examen minucioso y comparativo de todas aquellas fichas realizado en diversos museos por Schmandt-Besserat a comienzos de los años setenta permitió que expusiera una hipótesis interesante (Mattesich, 2000). Esta investigadora se fijó en diversas similitudes existentes entre las fichas y las representaciones pictográficas sobre tablillas de arcilla que usualmente se consideraban una primera y discutible forma de escritura. A partir de ello se podía defender que las primitivas formas de lenguaje escrito derivaran del intento de reproducir sobre una tablilla de arcilla esas mismas fichas.

Antes de discutir la viabilidad de esta hipótesis, conviene detallar la apariencia de estos objetos. Así, Schmandt-Besserat los diferencia en dos clases:

1. Fichas planas, de formas limitadas y geométricas (Figura 7): discos, triángulos, rectángulos, ovoides, esferas, cilindros, conos y tetraedros. En su examen de la supuesta correspondencia con los primeros dibujos descriptivos de elementos de uso cotidiano, sostenía que estas fichas venían a representar productos simples como cestos de grano (esferas), o animales (cilindros).
2. Fichas complejas, caracterizadas por presentar formas distintas y variadas, incisiones, perforaciones, puntos sobre su superficie. Según su hipótesis, estas fichas venían a referirse a productos manufacturados, vasijas de aceite (ovoides con una incisión), productos metalúrgicos, incluso servicios como jornadas de trabajo, etc.

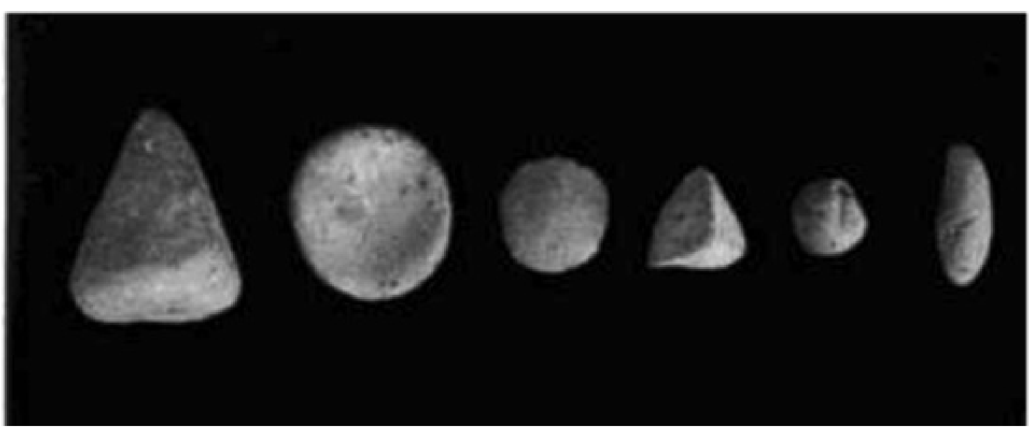

Figura 7

Esta correspondencia ha sido discutida por cuanto se considera actualmente que no hay una base arqueológica suficiente para afirmarla con la suficiente certeza. Así, por ejemplo, se puede encontrar (Mattesich, 2000) la siguiente correspondencia dada en la figura 8.

Sin embargo, algunas de las muchas clases de fichas que esta investigadora diferencia y hace corresponder al signo existente, no tienen una presencia constatada como tal ficha, por cuanto existe un número muy escaso de ejemplares llegando a registrarse como ejemplares únicos (Glassner, 2000). Así pues, la relación entre estas supuestas fichas y los productos que se sostiene que representan es extremadamente frágil. No obstante, parece cierto que las fichas, ya presentes en piedra desde el milenio VIII para transformarse en arcilla seca a una temperatura moderada (600° C) tres milenios después, son elementos contables utilizándose para describir cantidades de productos, animales o cualquier elemento de la actividad económica. La forma de hacerlo, tal como reflejan algunos depósitos de fichas encontrados, debe haber sido aditiva durante largo tiempo.

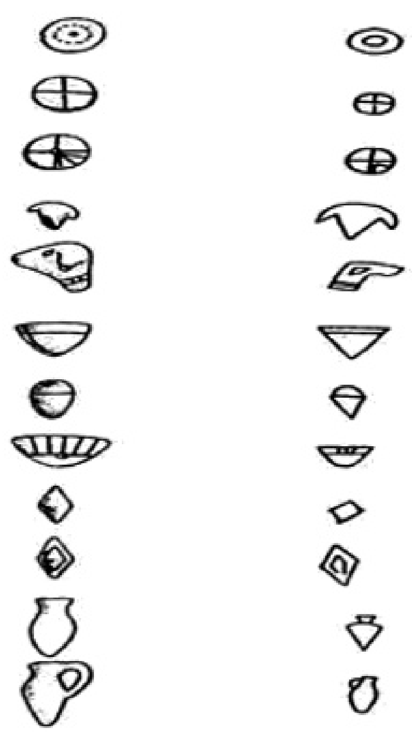

Figura 8

Así, en caso de disponer de cinco animales, se representaría tal cantidad por cinco fichas en forma de cilindro. Si, en cambio, se quiere registrar cinco jarras de aceite, se emplearían cinco ovoides incisos. De este modo, cada ficha representaría una unidad del producto cuya naturaleza viene representada por la forma de la ficha y la cantidad muestra una representación aditiva. Por tanto, no se puede hablar de empleo del número como propiedad abstracta de diversos conjuntos de elementos por dos motivos: Primero, porque los elementos contables muestran en su forma la naturaleza cualitativa del producto de que se trata y, en segundo lugar, porque el establecimiento de una correspondencia uno-a-uno entre los elementos a contar (animales, jarras) y los elementos contables (fichas) es condición básica para la formación del número, pero no lo presupone. No hay en este tiempo un signo común que represente a la cantidad de elementos contados.

Diversas incógnitas siguen persistiendo sobre el uso numérico de las fichas y su utilización por los sumerios. Por ejemplo, hay discrepancias sobre si su forma y apariencia no sólo reflejan la naturaleza del producto que representan sino también algún tipo de información numérica. Por ejemplo, cabe pensar que, como sucederá en la representación escrita a partir del tercer milenio, el tamaño de las fichas dé información sobre la cantidad. Una pequeña esfera representaría un cesto de grano, por ejemplo, pero una esfera más grande vendría a representar una cantidad mayor de cestos de grano. Esta hipótesis (Nissen, Damerow y Englund, 1993) es objeto de discusión sin que sea fácil llegar a conclusiones definitivas por la escasez de datos. Como se comprobará a continuación, son muy poco frecuentes los descubrimientos arqueológicos que muestren, a modo de piedra Rosetta, una simultaneidad de representación mediante signos y fichas, con lo que es difícil establecer correspondencias. Por otro lado, las excavaciones incontroladas de principios del siglo XX han roto en muchos casos el vínculo que pudiera existir en origen entre signos sobre tablillas y fichas.

Desde muy pronto las fichas debieron ser transportadas en algún tipo de envoltura, sean bolsas de cuero o similares.

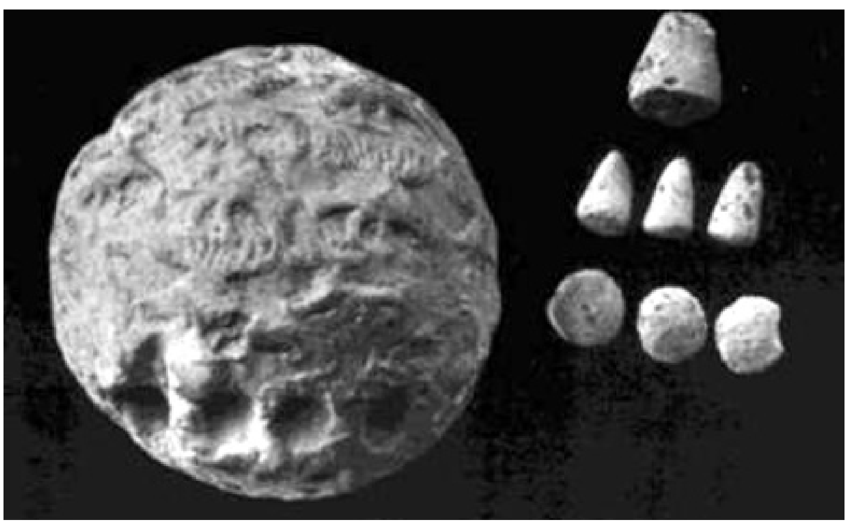

Figura 9

Sin embargo, en algún momento, la forma de transporte se simplificó envolviendo estas fichas en esferas huecas de barro que han sido encontradas en niveles posteriores y cuya presencia es constante durante largo tiempo. Estas burbujas *(bullas*) de arcilla pueden en muchas ocasiones presentar signos externos realizados con los dedos o con un cálamo redondo o triangular (figura 9) Esto permite formular una hipótesis sencilla y atractiva (Ifrah 1987) sobre la funcionalidad de fichas y burbujas.

Dos campesinos, por ejemplo, desean hacer un trueque de productos. Uno entregará varios animales a cambio de un número de cestos de grano. Cuando llegan al acuerdo difieren el pago al objeto de que algunos de sus trabajadores acuda a las tierras del otro para recoger el objeto del intercambio.

Pero, de algún modo, ha de sellarse el acuerdo. La forma de hacerlo será moldear las fichas que representen las cantidades que cada uno entregará y dárselas al otro envueltas, para su mejor transporte, en una burbuja de arcilla. De este modo, los trabajadores de cada uno se presentan en las tierras del otro con la burbuja recibida. Allí mismo se rompe y se encontrarán las fichas que representan aquello que debe entregarse al poseedor de la burbuja.

Hay dos datos que parecen concordar con este planteamiento. Por un lado, las burbujas muestran los relieves característicos del empleo de un cilindro sello, elemento específico de cada individuo y que actúa a modo de firma actual.

Figura 10

El arte de la glíptica, que así se denomina a las formas artísticas de estos cilindros sellos, estuvo extremadamente desarrollado en el tiempo de los sumerios. Eran cilindros de un material resistente que podían llevarse colgados al cuello y que podían representar escenas mitológicas (figura 10), formas de animales, paisajes, etc. y en general escenas enormemente variadas (sobre todo, en los propietarios particulares) o bien mostrar elementos geométricos abstractos de más reducida variación, como estrellas, líneas onduladas, etc. (y que parecen referirse a instituciones).

El hecho de que las burbujas muestren el paso de un cilindro sello correspondería a garantizar con él la autenticidad de su contenido respecto al propietario que hubiera cerrado la burbuja.

El segundo dato que apoya la hipótesis mencionada, son las marcas realizadas en el exterior de la burbuja cuando la arcilla está aún fresca, realizadas con dedos o cálamos distintos. Parecen representar sobre la superficie curvada las fichas que permanecen dentro de la burbuja, a modo de recordatorio de lo que contiene. Por ejemplo, una bulla encontrada en Susa (Glassner, 2000) muestra en su interior cinco cilindros y tres esferas pequeñas apareciendo en su exterior las marcas correspondientes: Cinco trazos alargados y tres círculos pequeños. Éste sería el vínculo defendido por Schmandt-Besserat entre las fichas y los signos que las representan. La hipótesis adquiriría una forma lógica y ordenada: Desde la representación de los productos con fichas se pasaría a dibujar el signo correspondiente sobre las burbujas que las contienen para, finalmente, prescindir del contenido y referir los intercambios comerciales y contabilidades exclusivamente al signo externo. En ese punto las fichas no serían ya necesarias y la burbuja podría adoptar la forma lenticular o rectangular típica de las tablillas de arcilla.

Sin embargo, los datos arqueológicos no concuerdan con esta hipótesis. Resulta posible que las inscripciones externas no se correspondan sistemáticamente con las fichas que permanecían en el interior. Así, por ejemplo, también en Susa se encontró una burbuja que contenía un cilindro, cuatro pequeñas esferas y un gran cono con una doble perforación lateral. En su superficie aparecía una marca alargada, cuatro círculos pequeños pero, extrañamente, ninguna marca cónica con un círculo inscrito, sino la marca circular dejada por un cilindro-sello cuando se aprieta por su base. Otros casos, sin embargo, son más reveladores. Otra burbuja de Susa, contemporánea con las anteriores, presenta en su interior hasta cuatro tipos diferentes de fichas (cilindros, tetraedros, discos y placas) pero en su exterior sólo se pueden encontrar conos y círculos pequeños en número dispar. Ello ha dado lugar a plantear la hipótesis alternativa de que, en algunas ocasiones, las marcas externas representaban a las fichas interiores, pero en otras no era así, y las dos informaciones podían complementarse. Tal sería el caso de que en el interior se encontrase una representación de cestos de distinta clase de grano de manera que en el exterior se representase, de manera complementaria, el total de cestos de grano, independientemente de su naturaleza. Es posible también que se cambiase de criterio según la costumbre local de manera que no existiera un modo unificado de representación plana de las fichas en todo el territorio, lo cual no sería extraño dada la fragmentación política y cultural existente.

Con el tiempo estas burbujas van haciendo inútiles, gracias a sus propias marcas numéricas, las fichas de su interior. Como se ha comentado, ausentes éstas, las burbujas fueron dando paso a las tablillas donde la representación numérica será plana a finales del cuarto milenio. Las tablillas tienen durante un cierto tiempo forma lenticular de manera que se sostuvieran con una mano mientras se escribía con la otra registrándose cantidades parciales en el anverso y, eventualmente, la suma de todas ellas en el reverso.

Primeros signos numéricos

Mientras la relación de las fichas con las marcas numéricas inscritas en la superficie de las burbujas no es inmediata pudiendo referirse a cantidades e información distintas, sí está constatada una continuidad entre las marcas dejadas en estas burbujas y las realizadas sobre tablillas de arcilla. La información que quieren transmitir o registrar para uso posterior es siempre la misma: Se trata de describir una cantidad numérica y la naturaleza del producto que se describe.

Durante todo el tercer milenio, hasta que en la tercera dinastía de Ur la escritura numérica cuneiforme sea un procedimiento estándar, los investigadores han llegado a registrar unos 1200 signos diferentes de los cuales una gran parte son una forma primitiva de escritura (pictográfica e ideográfica, como se verá más adelante) y aproximadamente sesenta muestran una naturaleza numérica. Hay círculos, muescas realizadas con dedos o con un cálamo apoyado transversalmente, hay muescas agujereadas y otros signos combinación de otros elementales. Trasladando a estos signos lo encontrado en la escritura numérica cuneiforme, se defendió en principio la presencia de un sistema de numeración sexagesimal con abreviaturas en las decenas (figura 11).

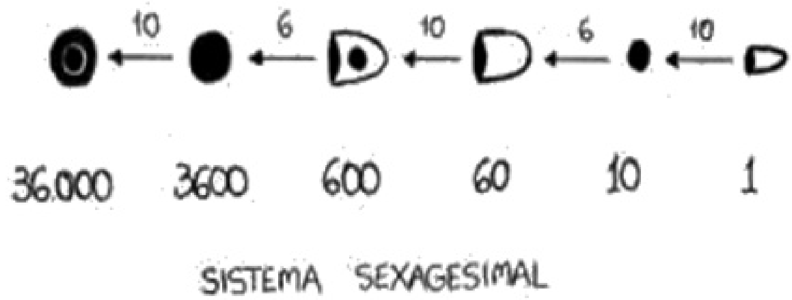

Figura 11

Sin embargo, la profusión de signos es mucho mayor que la dada por este sistema y, aunque esto podría ser debido a variaciones locales del mismo sistema, otros datos sembraron la duda sobre la uniformidad del modo de numeración. Así, por ejemplo, existe un signo para 120 (dos grupos de sesenta) que no responde a la base considerada (60) ni a las abreviaturas que realizaban en torno a las decenas. Al mismo tiempo, hacia los años ochenta se ha podido notar que este signo de 120, por ejemplo, nunca ocurre al mismo tiempo que el de 600, de manera que cinco signos del primer tipo fueran sustituidos por un signo del segundo tipo. Del mismo modo, dos signos de 60 no son sustituidos nunca por un signo de 120 si se dispone del signo del 600. En otras palabras, los signos correspondientes a 60 y 600 pueden ir juntos, así como 60 y 120 por otro lado, pero los tres signos nunca se dan a la vez.

Entrando en un examen más pormenorizado del contexto en el que se inscribían estos signos numéricos empezó a distinguirse un uso de los mismos adecuado a la naturaleza de los elementos que se contaban. Así, el sistema sexagesimal (contando con signos para el 60 y el 600 simultáneamente) se utilizaba para medir la cantidad de objetos discretos como animales, productos textiles, pescado, madera o contenedores. En cambio, cuando se deseaba contar objetos menos discretos como grano, leche o queso, el escriba sumero-acadio utilizaba otro sistema llamado bisexagesimal (figura 12).

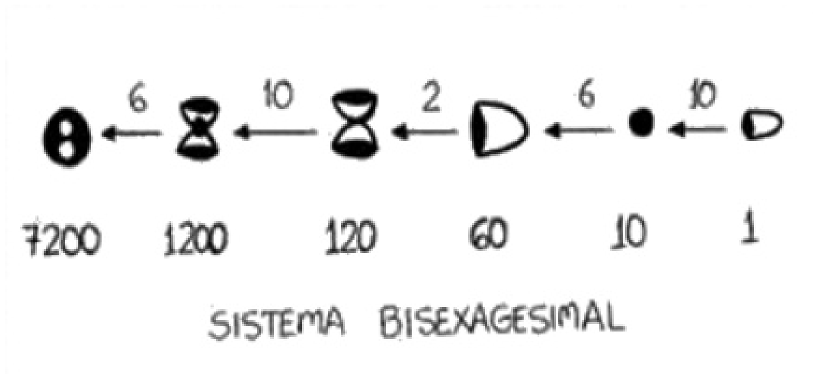

Figura 12

La confusión procedía muchas veces de que se empleaban los mismos signos para denotar cantidades distintas dentro de sistemas diferentes de numeración, adaptados cada uno a la naturaleza de los elementos que se contaban. Así, por ejemplo, una cantidad de 796 unidades de grano se representaría de la forma mostrada en la figura 13a (bisexagesimal).

6 x 120 + 1 x 60 + 1 x 10 + 6 x 1

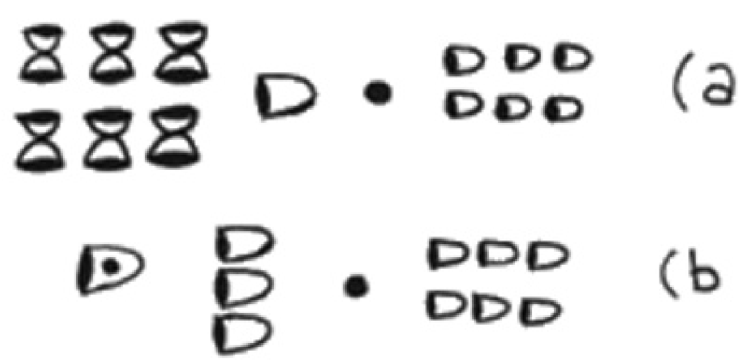

Figura 13

Sin embargo, si se quisiera describir la misma cantidad de animales, el sistema cambiaría (figura 13b) para mostrar los siguientes signos en sexagesimal:

600 + 3 x 60 + 1 x 10 + 6 x 1

La especificidad de los sistemas de numeración empleados llega al extremo de adaptarlo al tipo de grano utilizado. Sucede algo parecido a la convivencia actual de formas de conteo diferentes para determinados productos. Así, se suele contar por decenas pero, en el caso de los huevos, aún se compran por docenas. Del mismo modo, el mesopotámico que desea contar cebada no utiliza el sistema bisexagesimal aplicable a cualquier tipo de grano, sino que emplea otro, un sistema denominado SE (figura 14).

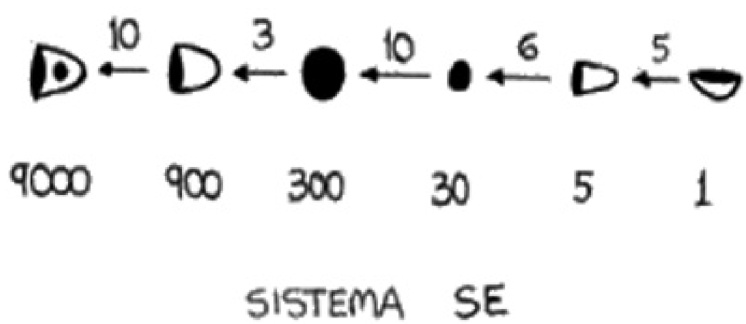

Figura 14

De esta forma, 796 unidades de cebada (cestos, por ejemplo, u otro tipo de medida) se expresarían como (figura 15):

2 x 300 + 6 x 30 + 2 x 5 + 6 x 1

Hay otros signos y sistemas de numeración adecuados a las medidas de capacidad, a las de área, al tiempo. Incluso cabe señalar con una marca sobre los signos numéricos la naturaleza específica de aquello que se cuenta (por ejemplo, para distinguir la malta de la cebada utilizando el sistema SE).

Figura 15

Veamos algunos ejemplos sobre tablillas concretas (Nissen, Damerow y Englund, 1993). En la primera (figura 16) se presenta una simple unidad de información sin que haya una secuencia de signos según una dirección determinada.

Figura 16

Lo que se cuenta numéricamente se indica con el signo de una espiga, una forma pictográfica que denota que la cantidad se refiere a cebada. Se encuentran como signos numéricos los siguientes:

$$3 \times 9000 + 900 + 6 \times 30 + 1 \times 5 + 1 \times 1$$

Dentro de un símbolo que representa el tiempo se muestran,

$$3 \times 10 + 1 \times 7$$

es decir, 37 meses. A su derecha un signo que denota la función de la tablilla, probablemente (en parte aparece borrado) el resultado de un acto contable. Abajo a la izquierda se encuentra la firma del responsable de la tablilla. Dada su transcripción fonética actual se ha dado en llamar Ku-sim a los dos signos unidos que aparecen. De modo que puede llegarse a determinadas conclusiones respecto de esta tablilla. En un tiempo determinado (37 meses) se ha recolectado esa cantidad de cebada que debe registrarse como depósito en el granero del templo. La cantidad tan crecida (equivalente a unos 135 mil litros de grano) indica que éste no es un registro particular y que Ku-sim debe haber sido un jefe de escribas dentro de una institución como el templo.

Otro sencillo caso se muestra a continuación (Op.cit., p. 40), también con el mismo origen, las tablillas firmadas por Ku-sim (figura 17).

Figura 17

Aquí la información es múltiple por lo que el escriba divide la tablilla en casillas diferentes mediantes filas y columnas algo irregulares. Éste es un segundo paso en la estructuración de la información hasta que adopte una dirección unificada de izquierda a derecha más adelante.

Además de la firma del responsable, hay tres casillas, una grande a la izquierda y dos más pequeñas a la derecha. Las de la derecha presentan dos cantidades de grano. En la superior se refiere, nuevamente, a cebada, mostrándose los siguientes signos:

$$8 \times 30 + 4 \times 5 + 2 \times 1$$

En la inferior hay otra cantidad en el mismo sistema SE:

$$1 \times 300 + 2 \times 30 + 2 \times 5 + 4 \times 1$$

pero en este caso se refiere a malta por cuanto los signos numéricos aparecen con una muesca oblicua. Pues bien, en la casilla izquierda se presenta una cantidad dada por:

$$2 \times 300 + 1 \times 30 + 1 \times 5 + 1 \times 1$$

que es justamente la suma de las dos cantidades de la derecha.

La misma tablilla puede mostrar diversos productos contados con sistemas diferentes. Tal es el caso de la mostrada en la figura 18 (Op. cit., p. 94). En ella se registran en casillas la información de productos posiblemente almacenados y de carácter ganadero. Examinemos algunas de ellas observando la simultaneidad de formas de conteo.

Casillas de la columna izquierda:

En el extremo superior y dentro del sistema bisexagesimal se registran $2 \times 10 + 6 \times 1$ unidades de mantequilla, producto cuyo signo aparece inmediatamente debajo de la cantidad.

Las restantes casillas más abajo se refieren a lana de oveja o cabra mostrando diversas cantidades desde una decena hasta 1 x 10 + 6 x 1 más abajo

Figura 18

Casillas de la derecha (figura 19):

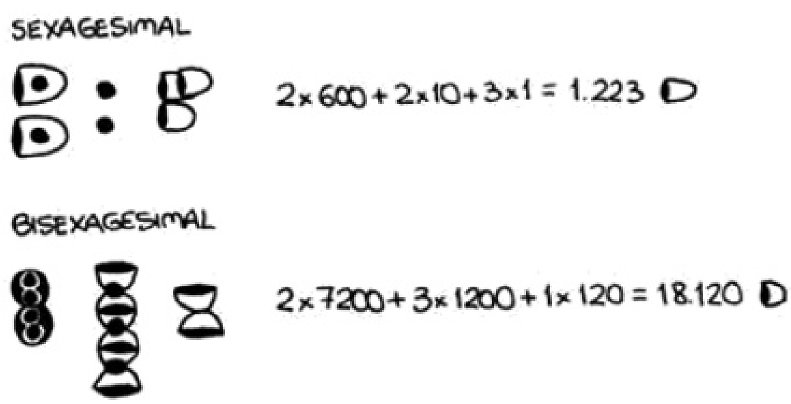

Figura 19

La superior muestra un registro de estiércol en sistema sexagesimal,

2 x 600 + 2 x 10 + 3 x 1

mientras que la inmediatamente inferior utiliza, en cambio, el sistema bisexagesimal para señalar una cantidad de queso:

$$2 \times 7200 + 3 \times 1200 + 1 \times 120$$

Esta es la forma más evolucionada de las tablillas antes de la introducción de la escritura y los signos cuneiformes, que se examinan a continuación.

Signos numéricos cuneiformes

El tipo de anotaciones escritas arcaicas se extienden a lo largo de varios cientos de años hasta que en Ur III (2100 a.C.) la presencia de la más conocida escritura cuneiforme en base sexagesimal se extiende a todos los testimonios escritos, como uno de los frutos de la centralización administrativa de aquel tiempo. Téngase en cuenta que, a lo largo de este milenio, la importancia del idioma acadio será creciente entre los sumerios y la estrecha relación entre ambos pueblos con hablas distintas aconsejaba la instauración desde la autoridad centralizada de aquella época de normas y reglas para uniformizar la escritura que iba cambiando paulatinamente.

El primer paso en este camino fue el de diferenciar los signos numéricos de los pictogramas que describen la naturaleza del producto, tal como se ha visto en los últimos ejemplos del apartado anterior.

La introducción de la escritura cuneiforme, que será examinada en mayor detalle dentro del siguiente apartado, no parece haber sido abrupta ni igual en todos los lugares. Previsiblemente, el peso de la tradición contable hizo conservar muchos signos arcaicos durante un tiempo prolongado. De este modo se pueden encontrar combinaciones de ambas formas de escritura.

La escritura cuneiforme que va surgiendo de esta manera se caracteriza inicialmente por usar la “muesca” en forma de cuña hecha con la punta del estilo o cálamo sobre la arcilla fresca de forma que, para los primeros números (del 1 al 9) se utiliza aditivamente la muesca repetida otras tantas veces (figura 20)

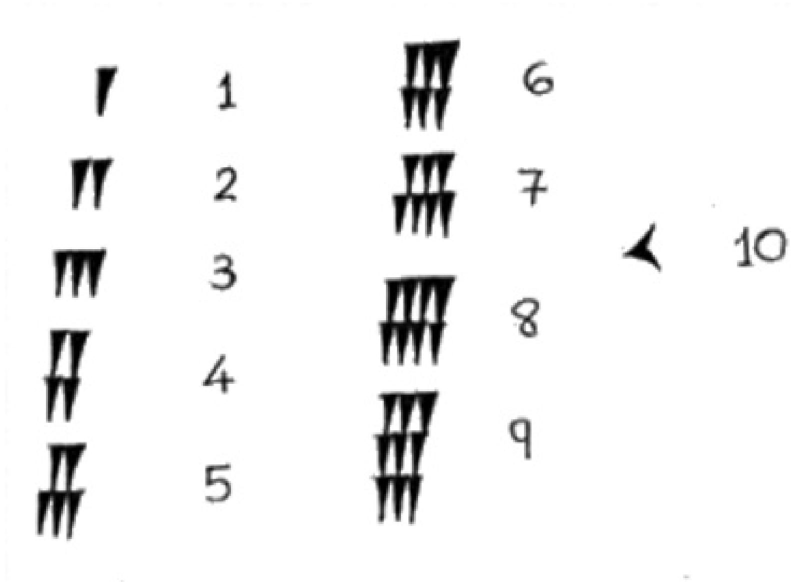

Figura 20

Para no acumular signos en una gran cantidad se representa la decena, como se puede apreciar en la tabla, haciendo un signo horizontal abierto con el cálamo. De este modo, también se pueden presentar aditivamente las decenas junto a las unidades. Tal es el caso de los siguientes ejemplos (figura 21):

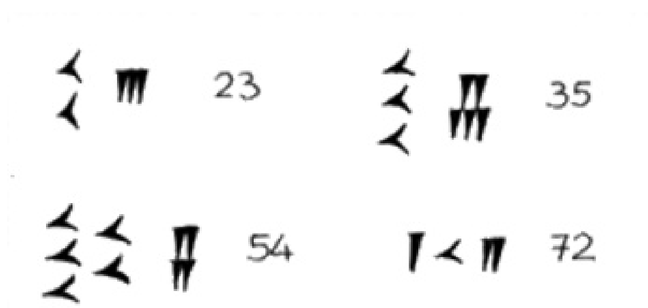

Figura 21

La característica esencial de la numeración cuneiforme aparece en esta última cantidad. Cuando se llega a contar sesenta unidades los signos conocidos dejan paso de nuevo a una unidad pero colocada a la izquierda de las cantidades hasta ahora representadas. Se encuentra así el primer caso histórico de utilización de un sistema de numeración posicional, en este caso basado en la base 60 (Sánchez

1943). Siguiendo la notación más extendida propuesta por Neugebauer, se escribirá la cantidad de 72 como 1.12 de manera que puede haber unidades superiores pero también inferiores, como ya se verá, de modo que 2.23.15; 12.08, por ejemplo, vendría a representar:

$$2 \times 60^2 + 23 \times 60 + 15 + 12 \times 1/60 + 8 \times 1/60^2$$

Los símbolos utilizados en la escritura sexagesimal de cualquier cantidad serán los siguientes (figura 22).

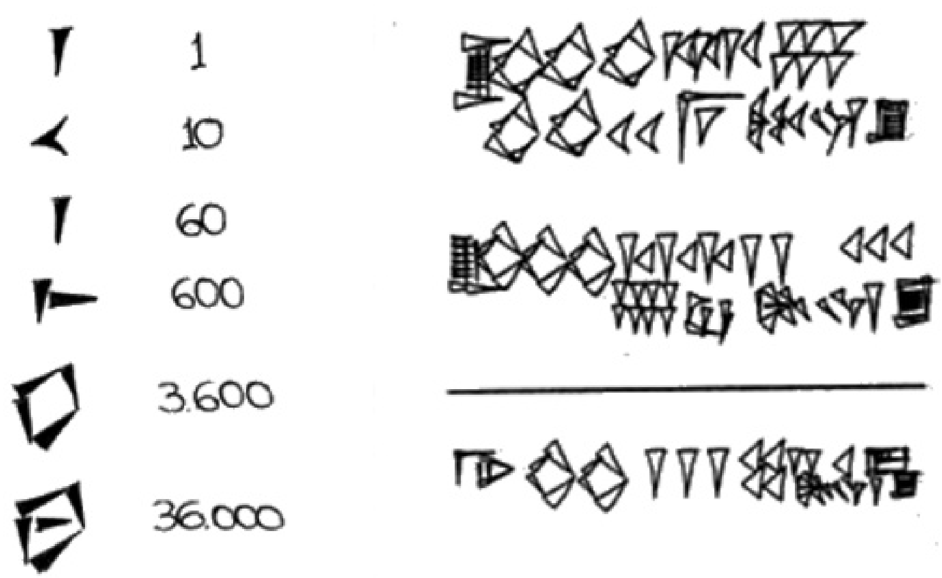

Figura 22 y 23

Con estos criterios se podrán comprender los signos mostrados en una tablilla del período Ur III (reinado de Su-Sin) donde se contabilizan en días de trabajo, los créditos y débitos correspondientes al capataz de un grupo de trabajadoras campesinas. Aunque los cálculos son más complejos (Nissen, Damerow y Englund, 1993, p. 52) se encuentran en la parte inferior del anverso y reverso de la tablilla las siguientes cantidades (figura 23).

Hay tres entradas que están representadas en esta figura.

Entrada superior:

Trata de los días de trabajo que este grupo de trabajadoras "debe", probablemente a la administración local. Aparecen las siguientes cantidades de izquierda a derecha y de arriba a abajo,

$$5 \times 3600 + 36 \times 60 + 2 \times 10$$

a lo que hay que añadir un signo en ángulo que significa "menos" y una unidad. Estamos, pues, ante el número 5.36.19 expresado como 5.36.20 - 1. El signo inicial a la izquierda significa "Total" y aparece también en la entrada intermedia. El resto de signos al final significan "días de trabajo".

Entrada intermedia:

Como en el caso anterior, es un total de "créditos" o días efectivamente trabajados y donde figuran las siguientes cantidades,

$$3 \times 3600 + 32 \times 60 + 3 \times 10 + 8 \times 1 + 5/6$$

Entrada inferior:

Se refiere al déficit en el que se incurre, con un signo al principio que significaría "débitos" en días de trabajo, siendo un total de,

$$2 \times 3600 + 3 \times 60 + 4 \times 10 + 1/6$$

ya que:

$$\begin{array}{rl} & 5.\ 36.\ 19 \\ - & \underline{3.\ 32.\ 38\ 5/6} \\ & 2.\ 03.\ 40\ 1/6 \end{array}$$

operando en el sistema sexagesimal.

Esta forma de escritura puede dar lugar a una serie de ambigüedades (Bunt, Jones y Bedient 1988) por la ausencia del cero cuando se carece de unidades intermedias.

Así, por ejemplo, las cantidades 62, 3602 ó 3720 se escribirían en sexagesimal con los mismos signos (figura 24).

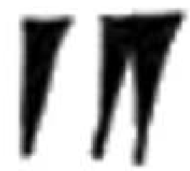

Figura 24

Durante casi toda la historia antigua de Mesopotamia no se registró signo alguno para el cero ni una separación apreciable entre los signos que pudiera diferenciar, con su lectura, cuál de los dos casos estaba presente. Dado que la mayoría de las tablillas encontradas son de origen escolar y estaban destinadas al aprendizaje de los estudiantes de escriba, es de suponer que el contexto de la situación planteada fuera suficiente para interpretar los datos registrados.

En un período muy posterior, dentro ya del primer milenio, se encontraron tablillas que añadían un signo específico para señalar la ausencia de unidades. Tal es el caso de la cantidad 2.0.36 en sexagesimal, por ejemplo (figura 25).

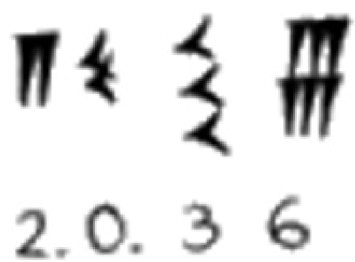

Figura 25

La escritura cuneiforme

Las primeras inscripciones encontradas en las excavaciones de Uruk y otras semejantes son etiquetas que describen una cantidad de un producto indeterminado o bien listas de signos repetidos en tablillas para la instrucción de los aprendices de escriba. Datan aproximadamente de finales del cuarto milenio (3100 a.C.). Estos signos son pictogramas, es decir, representan total o parcialmente al objeto designado mediante imitación gráfica, tal como se presentaron en el primer apartado de este capítulo (figura 8).

Durante largo tiempo la escritura pictográfica se redujo a documentos administrativos y económicos necesarios para las actividades ordinarias de los templos y palacios. También, aunque en mucha menor medida, cuando tales actividades eran privadas. Hay tablillas correspondientes a registros de ganado, cereal, pescado, productos textiles, así como otras más complejas que denotan una creciente necesidad de calcular cantidades de distinto origen.

Si se deseaba registrar el número de bueyes, por ejemplo, bastaba dibujar el signo correspondiente a uno de estos ejemplares. Pero ello no permitía distinguir si el registro era de los animales vivos en el rebaño o de los que habían muerto, por ejemplo. Circunstancias complementarias de los elementos a contar, por consiguiente, eran difíciles de expresar a no ser que se aumentase indefinidamente el número de pictogramas con el riesgo de llegar a un número demasiado crecido de ellos. Otra alternativa explorada por los sumerios consistía en combinar varios signos de manera que los correspondientes a la mujer y la montaña, por ejemplo, dieran lugar a la idea de "esclava" por cuanto éstas se obtenían en las incursiones realizadas contra las tribus de las montañas. El signo de la boca unido al de cebada, daba lugar a la idea de "hambre" o incluso a la acción de "comer". De este modo, los primitivos pictogramas, cuyo empleo se reducía a la descripción de elementos observables, fueron ampliando su uso para transformarse en la práctica en ideogramas o signos destinados a expresar ideas.

Atendiendo a la pronunciación del idioma sumerio acorde con estos signos, hay que tener en cuenta que el sumerio es una lengua monosilábica, lo que va a limitar fuertemente las posibilidades de representar conceptos diferentes con la pronunciación de las mismas sílabas. Un caso de este tipo es el de "buey", que se pronuncia "gu" pero, del mismo modo, "hilo" también se pronuncia "gu", de manera que se dispone de dos signos (el de buey y el de hilo) para la misma pronunciación. Ello hace sospechar que, para entenderse entre sí, los sumerios utilizaban estas sílabas añadiéndoles un tono, a la manera del chino actual (Calvet, 2001). El principio de usar varios signos para el mismo sonido (gu) se llama homofonía y es quizá la más importante característica del sumerio.

La homofonía del sumerio permite combinar diversos signos y sonidos para expresar ideas de forma paralela al empleo de signos, tal como se ha comentado. Uniendo, por ejemplo, el signo de "boca" (pronunciado "ka") y el de cebada (pronunciado "se") se puede expresar la idea de "hambre" pronunciándose "ka-se"

Estos ideogramas surgidos de la necesidad de describir ideas, antes que objetos concretos, recibe un fuerte impulso varios cientos de años después. El rey Enmebaragesi, de Kish (2600 a.C.) es el primero del que se tiene constancia que tuviera su propia inscripción. Ello implica un deseo de expresar ideas cada vez más amplias (victoria, derrota, devoción al dios, fuerza, valor, etc.) referidas a los reyes, así como los primeros cantos literarios a los dioses. Todo ello coincide, un tiempo después, con el período sargónida (hacia el 2300 a.C.) y la irrupción del acadio como lengua oficial que va desplazando rápidamente al sumerio.

En este sentido, la homofonía del sumerio va dando lugar al empleo de signos correspondientes a fonemas y, por tanto, a la llamada escritura fonética. El hecho de que la lengua acadia fuera polisilábica, en contraposición a la sumeria, pero al tiempo deseara expresar sus palabras mediante la escritura sumeria, fue un impulso probablemente decisivo hacia el intento de expresar las sílabas que se pronunciaban verbalmente mediante una combinación de signos sumerios correspondientes a sílabas (Gelb, 1982). Nace de esta forma lo que para muchos investigadores es la primera forma de auténtica representación escrita (Walker, 1987).

A lo largo de este tiempo se iban produciendo otras modificaciones técnicas que incidían en la misma dirección de alejamiento de la escritura desde sus orígenes pictográficos hacia una mayor abstracción. En efecto, el trazado curvilíneo de muchos de los pictogramas era difícil de realizar sobre arcilla fresca. Resultaba más sencillo y duradero el empleo del cálamo de manera rectilínea mediante el trazado de "muescas" en forma de cuña (origen de la palabra "cuneiforme"). Los signos así, van cambiando (Gelb, 1982, p. 102) tal como se indica en la figura 26.

Al mismo tiempo, existe un cambio en la orientación de la escritura hacia el 2600 a.C. Todos los pictogramas experimentan un cambio de rotación de unos 90 grados hacia la izquierda. Veamos una explicación a tal hecho. Inicialmente los datos numéricos y pictográficos se encerraban aisladamente entre líneas verticales y horizontales. Las tablillas podían ser grandes y pesadas pero ello fue cambiando hacia otras más pequeñas y ligeras, primero en forma circular y luego rectangulares. Al mismo tiempo la escritura, que en origen se disponía verticalmente, se fue adaptando a amplias líneas horizontales y transformando su sentido para escribirse de izquierda a derecha.

Puede que la razón del giro observado fuera puramente mecánica. Al sostener sobre una mano la tablilla mientras se escribía con la otra, el sentido de los signos cuneiformes se trazaba del modo más cómodo, modo que no tenía por qué coincidir con el formato final para, posteriormente, girar la tablilla facilitando la lectura.

Figura 26

Dado el carácter progresivamente más abstracto de los signos cuneiformes es posible que finalmente fuera adoptándose el sentido más cómodo de escritura justificando así el giro de 90° producido a lo largo del tiempo.

Aprendizaje de matemáticas

Que existieron escuelas donde estudiantes para escribas aprendían la escritura y las técnicas matemáticas elementales, es un hecho constatado. Se basa en la presencia de abundantes tablillas con ejercicios repetitivos (figura 27) y otros formatos escolares, más que en la constancia arqueológica de lugares en que se enseñara. A ese respecto es difícil distinguir un lugar concreto dedicado a tales menesteres por cuanto entonces no era necesaria la presencia de bancos, dado que los escribas podían estar sentados o más probablemente en cuclillas, y depósitos de tablillas, estilos y cálamos pueden haber tenido otra finalidad.

Existe un texto que sitúa este aprendizaje en una denominada "casa de las tablillas" (Margueron, 1996) y donde un estudiante relaciona sus actividades:

> *"Escolar, ¿dónde has ido desde tu más tierna infancia? He ido a la escuela. ¿Qué has hecho en la escuela? He leído mi tablilla, he tomado mi desayuno, he preparado mi nueva tablilla, la he llenado de escritura, la he terminado; después se me ha indicado que diga mi lección y a mediodía, se me ha indicado mi ejercicio de escritura. Al final de la clase he ido con los míos..."* (Op. cit., p.427).

Es muy probable, por tanto, que existieran lugares para el aprendizaje del futuro escriba. Su necesidad fue creciendo a medida que el estado centralizado se constituía como protagonista de la historia sumeria, desde la poderosa ciudad estado de Uruk hasta la emergencia de Ur y la posterior preponderancia babilónica. Se han encontrado de estos períodos decenas de miles de tablillas realizadas con motivos administrativos y económicos por lo que hay que suponer la presencia de un nutrido grupo de escribas en todo este tipo de actividades.

Figura 27

Leer y escribir eran la base de sus áreas, tanto en lo que se refiere a redactar cartas e informes como, posteriormente, escribir glorificaciones a los reyes o los dioses. Pero también debían conocer las técnicas contables fundamentales que les permitieran dirigir la administración del palacio o el templo, llevar el registro del almacenamiento de productos, sus transacciones, el reparto de raciones o el pago a los suministradores de productos o servicios.

Así pues, además del aprendizaje de la lectura y escritura, la enseñanza de las matemáticas es un conocimiento central dentro de estas escuelas y adopta una forma concreta de la que se puede deducir la metodología subyacente (Walker, 1987).

Inicialmente, el estudiante debe haberse familiarizado, quizá a los cinco o seis años, con las tablillas de arcilla y el cálamo o cálamos de que dispusiera. El maestro le enseñaría la dirección de la escritura, sea en tiempos arcaicos de arriba a abajo o, en tiempos babilónicos, de izquierda a derecha. De esta manera se han encontrado pequeñas tablillas rectangulares o lenticulares donde se aprecian dos columnas de signos, una correctamente realizada, la del maestro, y otra de manera más torpe (figura 21). Una vez que se adquiría una seguridad en el trazo, se empezaban a repetir los distintos signos de la escritura, sean pictogramas simples o palabras más complejas derivadas del acadio tras la reforma sargónida.

Desde el punto de vista matemático, se han hallado también tablas de multiplicaciones, recíprocos, cuadrados y sus consiguientes raíces cuadradas, etc. Junto a ellas se encuentran largas listas temáticas de problemas que muestran pequeñas variaciones. En los últimos capítulos se observarán algunos de estos problemas referentes al cálculo de volúmenes para tareas de excavación. El problema original aporta como datos las tres dimensiones del paralelepípedo excavado y pregunta por su volumen pero, inmediatamente y con los mismos datos y resultados, se plantean problemas donde la incógnita es la longitud o bien la anchura o bien la profundidad del volumen objeto de estudio. Son pequeñas variaciones de la incógnita que permiten practicar al estudiante la forma de resolver los distintos problemas que se pueden presentar. En ese sentido, los datos presentes están preparados y no son reales, en el sentido de facilitar (igual que hoy en día) los cálculos del estudiante y permitir que salgan resultados sin fracciones de la unidad o siendo éstas muy sencillas.

Han salido a la luz también listas de coeficientes que resultan de difícil estudio en la actualidad. Probablemente en niveles superiores de la enseñanza de escribas, estos coeficientes deberían actuar al modo en que determinados números son utilizados por los actuales ingenieros. Estos coeficientes, sólo recientemente estudiados en profundidad (Robson 1999), han dado lugar a un conocimiento importante de las técnicas de cálculo de los escribas mesopotámicos. Así, afirmar que el área del círculo se halla multiplicando 0; 05 por el cuadrado de la circunferencia permite suponer la existencia de unas relaciones entre los elementos del círculo que ofrecen una más amplia panorámica de los conocimientos de aquel tiempo. Todo ello será objeto de estudios detallados en esta obra, particularmente a partir del capítulo 6.

Además de los problemas, las tablas y las listas de coeficientes, pocas formas más se han conservado de la metodología referente a las matemáticas. Las que hay, sin embargo, permiten alumbrar, por el examen de su contenido, el modo en que actuaba el maestro de escribas. Las tablas y listas habían de completarse, indudablemente, y en lo referente a los problemas planteados la metodología no era muy distinta. Se observa en ellos el planteamiento de los datos esenciales para la resolución y luego, en modo imperativo, una secuencia de acciones que debe llevar a cabo el estudiante para alcanzar la solución. La enseñanza, por tanto, debía adoptar un formato algorítmico. Si el estudiante se encontraba un problema en el que se tenían como datos el volumen de un paralelepípedo, su longitud y anchura, debía multiplicar estos dos últimos términos, encontrar su inverso y multiplicar este inverso por el volumen para obtener finalmente la profundidad. Esta secuencia de acciones se practicaba una y otra vez hasta asociar ese formato de problema al procedimiento que lo resolvía. Se puede deducir en algún caso que hay cierta generalidad en el planteamiento de los problemas (todos los del mismo tipo aparecen agrupados) pero no hay en ningún caso la generalización de los procedimientos que hubiera permitido y propiciado la presencia de un lenguaje simbólico y un pensamiento más abstracto.

Este contexto habrá que tenerlo en cuenta en el momento de examinar las tablillas encontradas de naturaleza matemática por cuanto es cierto que hablan de unos conocimientos disponibles en la época pero, al mismo tiempo, se trata de un conocimiento interpretado desde la óptica de su condición de conocimiento para la enseñanza. Como actualmente, no se puede deducir de su examen de manera inmediata que los problemas matemáticos de la realidad cotidiana de los escribas fueran los mismos ni presentaran idénticos datos y tratamiento.

Capítulo 5
Comercio y aritmética

Suma y resta

Como se ha visto en el capítulo anterior, las tablillas contables servían para registrar cantidades diversas del mismo producto o de productos diferentes. Al corresponder a entradas distintas por el proveedor, el año de recogida o cualquier otra circunstancia, resulta adecuado hacer constar el total de las cantidades registradas. Eso se hacía habitualmente en el reverso de la tablilla. En el siguiente ejemplo (Nissen, Damerow y Englund 1993, p. 131) se puede observar una tablilla que registra jarras de cerveza, tanto en su anverso a la izquierda, como en su reverso a la derecha (figura 28).

Figura 28

Es un caso especialmente simple de suma por cuanto lo único que se hace en el reverso es presentar las siete jarras agrupadas. De este modo, la suma consiste en repetir cada uno de los elementos contables.

Hay dos aspectos de esta operación aritmética que suponen un salto cualitativo en la misma. Desde el punto de vista aritmético, las cantidades a sumar pueden rebasar la simple enumeración de sus elementos, al contrario de lo que sucedía en el caso anterior. Es entonces cuando ha de aplicarse el sistema de numeración vigente para reunir en un solo resultado la cantidad alcanzada. Desde el punto de vista lógico, también hay un salto cualitativo cuando se suman cantidades de productos diversos pero que pueden incluirse dentro de un mismo tipo más general, como sería el caso de sumar cantidades de diversos cereales (malta, avena, cebada, por ejemplo) para dar un total de cereal.

El ejemplo que se expone a continuación (Nissen, Damerow y Englund 1993, p. 38) muestra un caso donde las cantidades de cebada son tan crecidas que rebasan al ser sumadas la base sesenta de numeración, lo que obliga a realizar una suma en el sistema SE en el que están escritas las cantidades (figura 29).

En el anverso de la tablilla (a la izquierda) aparecen dos columnas. En la de la izquierda, sobre el signo de distintos oficiales receptores de dichos suministros, se muestran cantidades variables de cebada escritas mediante los signos arcaicos adecuados. En la columna derecha se encuentran diversos signos que denotan el tipo de registro contable (distribución de la cebada entre los oficiales citados) y el título o nombre del responsable del reparto (Ni- sa).

En el reverso (a la derecha) se presenta la cantidad total de cebada repartida (con el signo del producto) entre los nombres o títulos de los dos responsables (Ni-sa en la parte inferior y Ku-sim en la superior).

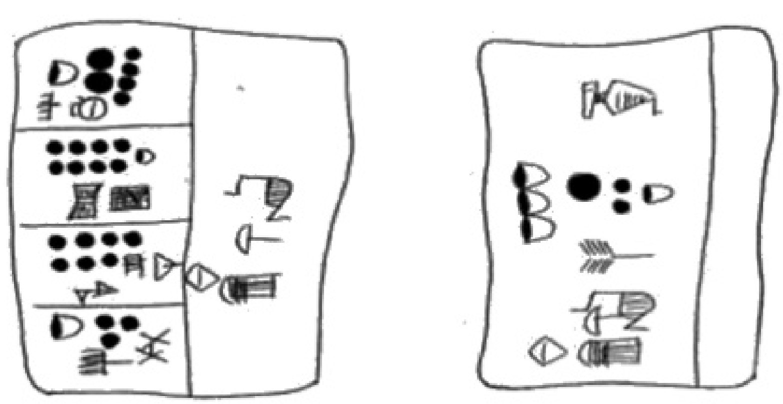

Figura 29

Las tablillas que se han visto muestran una operación de sumar que parece unívoca. En ella, se reúnen dos o más cantidades preexistentes (jarras de cerveza, grano de cebada) para alcanzar el total. Es por ello que llama la atención el hecho de que, tanto en el original sumerio como en el acadio posterior, la acción de sumar presente dos verbos distintos (Powell, 1995). Así, se conoce con la expresión "*gar*" en sumerio ("*kamaru*" en acadio) pero también con "dah" en sumerio ("*wasabu*", la correspondiente en acadio), lo que indica que se considera la adición como dos acciones diferentes. Por un lado y siguiendo una terminología actual, se tendría una combinación de cantidades simultáneas, tal como se ha visto hasta ahora, y por otro lado la suma también registraría el caso de un cambio temporal efectuado en una cantidad inicial. Así, por ejemplo, cuando se dispone de un rebaño con un número determinado de animales a los que habría que sumar en años sucesivos todos los terneros nacidos. Esta acción de sumar cantidades sucesivas a una inicial es lo que corresponde a la segunda expresión de la acción de sumar.

Esta diferenciación no ocurre en el caso de la resta. Para esta acción sólo hay un término ("*zig*" en sumerio, "*nasahu*" en acadio) donde se entiende que las cantidades no son simultáneas, sino que a una cantidad inicial se le quita otra posterior. El contexto contable en el que surgen casos de resta suelen ser el de la comparación entre las previsiones y lo sucedido en la realidad. Por ejemplo, hay tres tablillas (Nissen, Damerow y Englund 1993) que mencionan al "ensi" Enentarzi de Lagash, en tiempos sumerios. En una de ellas se registra una cantidad de cebada entregada (168 gur), otra cantidad recibida (165 gur) mostrándose en la tercera tablilla la cantidad diferencia correspondiente a una deuda pendiente (168 - 165 = 3 gur).

Multiplicación

Tanto para el cálculo de superficies de campos como el de volúmenes de tierra a extraer en la construcción de un canal, el de ladrillos a emplear en el levantamiento de un muro, por ejemplo, la multiplicación resulta una operación esencial. A ello habrá que unir las conversiones de unas unidades en otras, muchas veces resolubles mediante la multiplicación por un coeficiente. Esto sucede en el caso del cambio de unidades donde la transformación de una cantidad de "sar" de volumen en la cantidad equivalente de "sila", unidad de capacidad, se obtiene mediante la multiplicación de la primera por 6.40. Se presenta este ejemplo para entender mejor una serie de tablillas encontradas en las excavaciones de Ur y que consisten, presumiblemente, en un ejercicio escolar por el que se realizan tres multiplicaciones sucesivas, la última de las cuales es constantemente por 6.40 mientras que las dos primeras varían (Robson, 1999). Es de suponer que el ejercicio consiste en el cálculo del volumen de un objeto sólido (por ejemplo, un recipiente en forma de paralelepípedo) mediante las dos primeras multiplicaciones para transformar luego las unidades de volumen en las de capacidad correspondiente expresadas en "sila". Son cantidades relativamente sencillas que permitirán entender mejor la forma de multiplicación en base sexagesimal tal como debían practicarla en aquel tiempo.

El primer caso es el de un cuerpo de dimensiones

$$0;\ 36 \times 5 \times 30$$

de forma que su volumen se obtiene del modo siguiente:

$$0;\ 36 \times 5 = 3$$

$$3 \times 30 = 1.30$$

y la multiplicación por el coeficiente 6.40 cambia las unidades en las correspondientes de capacidad:

$$1.30 \times 6.40 = (1.00 \times 6.00) + (1.00 \times 40) + (30 \times 6.00) +$$
$$+ (30 \times 40) = (6.00.00) + (40.00) + (3.00.00) + (20.00) = 10.00.00$$

Un caso similar sería el de calcular el volumen de un cuerpo de dimensiones

$$2 \times 50 \times 8$$

Para hallarlo se realizan dos multiplicaciones sucesivas: $2 \times 50 = 1.40$

$$1.40 \times 8 = (1.00 \times 8) + (40 \times 8) = 8.00 + 5.20 = 13.20$$

para posteriormente multiplicar por el coeficiente:

13.20 x 6.40 = (13.00 x 6.00) + (13.00 x 40) + (20 x 6.00) +...
...+ (20 x 40) = (1.18.00.00) + (8.40.00) + (2.00.00) + (13.20) = 1.28.53.20

La categoría de coeficiente en el caso de 6.40 así como el hecho de ser ejercicios escolares de los aprendices de escriba puede deducirse analizando una variación encontrada en el caso del cuerpo de dimensiones 0;45 x 40 x 6 dentro del mismo grupo de tablillas:

0; 45 x 40 = 30
30 x 6 = 3.00

A continuación se multiplica por el coeficiente:

3.00 x 6.40 = (3.00 x 6.00) + (3.00 x 40) =...
...= (18.00.00) + (2.00.00) = 20.00.00

Sin embargo, el resultado que el escriba pone al final es el de 21.36.00. Aunque ello puede constituir un error, es más probable que resulte una multiplicación correcta por otro tipo de coeficiente (7.12) que, erróneamente, no transforma unidades de volumen en las de capacidad equivalentes:

3.00 x 7.12 = (3.00 x 7.00) + (3.00 x 12) =...
...= (21.00.00) + (36.00) = 21.36.00

Se ha especulado sobre la forma instrumental que adoptaban las multiplicaciones en la civilización mesopotámica. Kurt Vogel, por ejemplo, abogó por la existencia de algún tipo de ábaco con el que realizar los productos parciales. Ello no se puede descartar, si bien es muy difícil plantear una hipótesis fundada sobre la forma que adoptaría dicho ábaco y el modo de utilización, dado que no han quedado restos arqueológicos que orienten esta especulación. Sin embargo, es indudable que debían contar con alguna ayuda para retener los resultados parciales de multiplicaciones tan complejas como llegaron a hacer. Ciertas pistas se pueden obtener mediante el análisis de algunos errores de cálculo encontrados, una vez que se descarta por improbable debido a su regularidad el que respondan a distracciones. Por ejemplo, se puede analizar una tablilla del período neo-babilónico en la que se multiplica 10.50 por sí mismo (Hoyrup 2002).

$$10.50 \times 10.50 = (10.00 \times 10.00) + (10.00 + 50) +...$$
$$...+ (50 \times 10.00) + (50 \times 50) = (1.40.00.00) + (8.20.00) +...$$
$$...+ (8.20.00) + (41.40) = 1.57.21.40$$

El escriba, sin embargo, presenta como resultado final 1.57.46.40. El error es de 25.00 y ello coincide con el hecho de que éste es un resultado parcial que puede obtenerse al multiplicar. En efecto, ¿cómo realizan 50 x 50? Nuestro procedimiento actual podría ser multiplicar ambos números en base decimal (2500) para transformar el resultado en la expresión correspondiente en base 60 (2500 = 41 x 60 + 40 = 41.40). Sin embargo, hay que tener en cuenta que los escribas no manejaban la base decimal por lo que su procedimiento habría de ser, forzosamente, diferente. El preferente sería el de aplicar la propiedad asociativa en la multiplicación. Así, se interpretaría:

$$50 \times 50 = (5 \times 10) \times (5 \times 10) = (5 \times 5) \times (10 \times 10) =...$$
$$...= 25 \times 1.40 = (25 \times 1.00) + (25 \times 40) = 25.00 + 16.40$$

La aparición de un error de 25.00 puede llevar así a una serie de conclusiones. En primer lugar, que la cantidad que resulta de este producto parcial se ha contabilizado dos veces. En segundo, que los productos parciales se "borran" a medida que se introducen en el cálculo y es por ello que resulta factible repetir alguno al no ser visible ya su introducción anterior. Tal vez ello sea debido a que se van realizando las sumas parciales una tras otra sin esperar a tenerlas dispuestas, tal vez sobre la misma tablilla de barro fresco.

Una nueva conclusión consistiría en constatar la existencia de productos previamente memorizados por el escriba. Tal es el caso de 10 x 10 = 1.40, mientras que el producto 50 x 50 no es memorizado de la misma manera y ha de reconstruirse. Ello da un significado más claro a las tablillas encontradas donde se alinean tablas de multiplicación de un número cualquiera por otros números distintos, preferentemente del 2 al 12, 20, 30, 40 y 60. Así, una tablilla muestra estos resultados cuando se trata del número 18 (Suzuki 2002):

18 x 2 =	36	18 x 11 =	3.1
18 x 3 =	54	18 x 12 =	3.3
18 x 4 =	1.12	18 x 20 =	6.00
18 x 5 =	1.30	18 x 30 =	9.00
18 x 6 =	1.48	18 x 40 =	12.00
18 x 7 =	2.06	18 x 1.00 =	18
18 x 8 =	2.24		
18 x 9 =	2.4		
18 x 10 =	3.0		

Si memorizaban estos resultados podían reconstruir cualquier otra multiplicación por este número, como se puede observar en los siguientes ejemplos:

$$18 \times 36 = (18 \times 30) + (18 \times 6) = 9.00 + 1.48 = 10.48$$

$$18 \times 1.45 = (18 \times 1.00) + (18 \times 40) + (18 \times 5) = 18.00 + 12.00 + 1.30 = 31.30$$

Los dos ejercicios preferentes resultan ser, además de estas tablas de multiplicar, los ejercicios sobre la utilización del cuadrado de los números. En alguna de estas tablillas se adivina el objetivo de conocer y practicar ciertas regularidades numéricas sin aplicación inmediata (Robson, 1999). Tal es el caso del cálculo planteado de

$$(0;\, 15^2 \times 17)^2 \times 16^2 = 17^2$$

que actualmente podemos notar como evidente dado que 0; 15 = 1/16 y por tanto, 0; 152 = $1/16^2$

Este interés por el cálculo del cuadrado de un número puede responder a una de las aplicaciones importantes de la multiplicación, la determinación de la superficie de un campo cuadrado. Un indicio de este hecho, además de los casos que se abordarán a partir del próximo capítulo, reside en la forma verbal que adopta la multiplicación entre los sumerios y acadios, nuevamente de dos formas distintas, indicando conceptos diferentes (Powell 1995).

La forma más usual sería la que podría traducirse, en el caso de 2 x 2, como "llevar dos a dos" que se asociaría al concepto de multiplicación como adición repetida. Sin embargo, esta operación conoce otra concepción de naturaleza combinatoria: 2 x 2 se interpretaría así como el número de casillas cuadradas de lado unidad que puede obtenerse de un cuadrado de lado dos (figura 30).

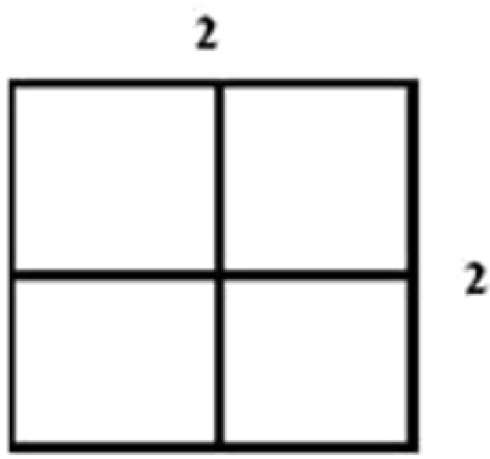

Figura 30

Así, el segundo término verbal que describe la multiplicación se podría traducir como "completar el perímetro" en sumerio o, en acadio "poner cada lado frente a otro" que supone una interpretación eminentemente geométrica de esta operación.

Uso de fracciones

Las fracciones suelen utilizarse en un contexto de reparto o bien de medida. En el caso mesopotámico surgen preferentemente en el segundo, durante la acción de medir. Así, si se dispone de una unidad (por ejemplo, un cesto) para contabilizar la cantidad de grano existente, se puede utilizar el sistema bisexagesimal contando unidades, decenas, sesentenas, etc., así como la mitad de la unidad. Sin embargo, hay varias formas de eludir el uso de fracciones incluso en este contexto y ambas se pueden encontrar en las antiguas matemáticas.

La más sencilla consiste en tomar como unidad la propia fracción, de manera que la anterior unidad se transforma en dos nuevas unidades. En efecto, si la relación era de 1 a $^1/_2$, la relación contraria, tomando a la mitad como unidad, será de 1 a 2. Es el mismo caso que se puede utilizar actualmente para, en vez de utilizar fracciones de metro para medir la altura de una persona (diciendo 1 metro, 6/10 de metro y 5/100 de metro), se puede afirmar que mide 165 centímetros, de forma que si 1 decímetro = 1/10 metro, recíprocamente, 1 metro = 10 decímetros. La segunda forma de eludir el uso de fracciones consiste en utilizar la notación ampliada de los números naturales, decimales en el caso actual, fracciones sexagesimales entre los sumerios. Así, 1 unidad y 3/60 de unidad se escribirían entonces 1; 03 del mismo modo que la estatura de esa persona puede describirse numéricamente con la expresión decimal 1,65 metros.

Dado el primer recurso, el de reducir la medida a conteo de subunidades para eludir el uso de fracciones de la unidad, es difícil constatar la presencia de fracciones en los más lejanos tiempos en que empezaba la medida y la contabilidad. Sin embargo, este recurso resulta de casi imposible utilización cuando se manejan formas de conteo que admiten particiones múltiples de la unidad. Tal es el caso del sistema SE que denotaba medidas de capacidad de grano, generalmente cebada. La unidad conoce hasta seis tipos de subunidades que en fracciones corresponderían a 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6 y 1/10 de modo que es difícil hacer de una de ellas la unidad por cuanto no habría relación numéricamente simple con las demás subunidades. Así que, a la vista de este hecho, se puede afirmar que el empleo de fracciones, aunque limitado por su contexto (la medida) y por sus tipos (unitarias), debe contar con tanta antigüedad como las propias formas de conteo.

Los tipos de fracciones fueron siempre limitados aunque más amplios que los señalados hasta ahora. Desde la cultura sumero-acadia de Ur III hasta las tablillas babilónicas posteriores, sólo se registran dos tipos de fracciones:

Las que se denotan "*igi-n-gál*" donde n correspondía a 2, 3, 4 ó 6. Son las fracciones unitarias 1/2, 1/3, 1/4, 1/6.

Las que se escriben "*lá igi-n-gál*", complementarias de las anteriores, 2/3, 3/4 y 5/6.

Hay que observar en primer lugar la ausencia de la fracción 1/5. El motivo parece ser el de la complejidad operativa que añade en los cálculos cuando han de operarse fracciones, sumándolas o restándolas. Así, las fracciones antes consideradas tienen como denominador común 12 como máximo. El considerar 1/5 supondría que ese denominador común ascendería a 60, lo que haría más complicadas las operaciones posteriores. Además, muchas otras fracciones como 2/4, 2/6, 3/6, 4/6, por ejemplo, serían fácilmente simplificadas mientras que 2/5, 3/5, 4/5 no, lo que haría aumentar los signos específicos a recordar para las fracciones que, por otra parte, son de gran simplicidad (figura 31).

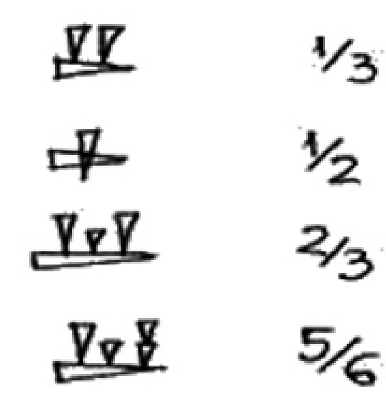

Figura 31

Pesos y problemas comerciales

La presencia más frecuente de las fracciones es, como se ha dicho, en un contexto de medida. Se ha añadido también que el empleo de subunidades permitía, en algún caso, eludir su uso. Resulta conveniente concretar lo afirmado en un caso particular como es el del peso.

Las transacciones y contabilidades comerciales se realizaban pesando los productos objeto de comercio (lana, cereal, estaño, etc.) y tasando su valor en la plata correspondiente, que actuaba a modo de moneda no acuñada (figura 32). La plata, mineral valioso y escaso en la tierra mesopotámica, provenía del Elam y también de la península de Anatolia, siendo objeto preferente de compra por parte de los comerciantes asirios. Actuaba en la triple función bajo la cual se constituye la moneda: Como unidad de cuenta, siendo el patrón de la contabilidad desde Ur III al menos; como medio de intercambio, dado que podía incluirse como parte de la transacción comercial; y también como medio de pago, tal como se deduce de numerosos documentos de venta y préstamos (Postgate, 1999).

Figura 32

Así pues, antes de abordar el modo en que se realizaban estas transacciones y, por tanto, la forma más concreta de utilización de las fracciones en la medida, es necesario determinar cuáles eran las unidades esenciales de peso en esta época.

Había cuatro unidades de peso desde finales del cuarto milenio, según se desprende de los textos arcaicos encontrados en Uruk (Neugebauer y Sachs, 1986):

1. El talento (*gu* en sumerio), correspondiendo a unos 30 kg (figura 5.6).
2. La mina (*ma-na*) presentando una relación de 60 minas por cada talento y que correspondería actualmente a medio kilo, aproximadamente.
3. El siclo (*gin*), presentando también la misma relación por la cual habría 60 siclos por cada mina, es decir, 8,33 gramos.
4. El grano de cebada (*se*), de forma que habría 180 granos por cada siclo (figura 33).

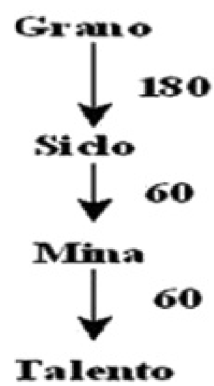

Figura 33

Como se ha comentado, los balances comerciales consistían en la reducción del valor de los productos al correspondiente en plata. Ello obligaba en no pocas ocasiones a realizar un trabajo de descomposición de fracciones conforme a los pesos disponibles. En una tablilla encontrada en Mari y datada en el comienzo del segundo milenio, se pesa una determinada cantidad de plata con pesos estándar determinados (Benoit, Chemla y Ritter 1992, p. 92):

> *"9 2/3 minas 2 ½ siclos de plata, (pesados) con pesos de 5, de 3 y de 2 minas de la reserva del rey; en relación a diversos pesos de la resera del rey, pesos de 10, de 5 y de 2 ½ siclos de ajuste hacen el equilibrio".*

La situación es la siguiente: Se pesa la cantidad de plata desconocida con pesos de

$$5 + 3 + 2 = 10 \text{ minas}$$

pero se observa un desfase que se va completando colocando en el lado de la plata pesos en siclos de manera que

10 + 5 + 2 / = 17 / siclos

restauran el equilibrio. Ello quiere decir que la plata que ha de pesarse cuenta con

$$10 \text{ minas} - 17\ {}^{1}/_{2} \text{ siclos}$$
$$10 \text{ minas} - (20 - 2\ {}^{1}/_{2}) \text{ siclos}$$
$$10 \text{ minas} - 1/3 \text{ mina} + 2{}^{1}/_{2} \text{ siclos}$$
$$9\ {}^{2}/_{3} \text{ minas} + 2\ {}^{1}/_{2} \text{ siclos de plata}$$

Un documento de la antigua Asiria, cuando los comerciantes circulaban entre Assur y Kanish estableciendo intercambios en productos entre ambas ciudades, hace un balance de una serie de operaciones efectuadas al objeto de que el propietario quede informado (Liverani 1995, p. 292-293):

- Plata enviada: 30 minas = 1.800 siclos 1.800 siclos
- Déficit a la llegada: 2/3 mina = 40 siclos 40 siclos
- Plata disponible: 1.760 siclos 1.760 siclos

A partir de esta cantidad disponible se registran los gastos efectuados (sólo se expone una parte de ellos) reduciéndolos a su valor en siclos de plata:

- 114 telas = 7 ½ minas 4 1/4 siclos de plata
- 454 1/4 siclos 2 talentos 15 minas + 40 minas + 8 minas de estaño un total de 13 5/6 minas 2 5/6 siclos de plata 832 5/6 siclos
- 6 asnos negros y forraje: 2 minas 8 siclos plata 128 siclos
- arnés 16 siclos
- gastos de viaje: 37 minas de estaño = 2 5/6 minas 2 1/6 siclos de plata 172 1/6 siclos.

Como se puede apreciar, se aplica sistemáticamente una equivalencia del valor de los productos al de la plata correspondiente en siclos. Los precios, en todo caso, fluctúan según los documentos registrados. Así, se puede deducir del primer gasto que cada tela tiene un valor muy cercano a los 4 siclos de plata. Naturalmente, las telas pueden variar en naturaleza, longitud y demás características. Un ejemplo similar afirma (Benoit, Chemla y Ritter, 1992, p. 94*): "25 telas de 7 1/4 siclos (de plata por) pieza, su precio: 3 minas 1 1/4 siclos (de plata)".*
Este cálculo requiere realizar la multiplicación:

25 x 7 1/4 = (25 x 7) + (25 x 1/4) = 175 + 6 1/4 = 181 1/4 siclos = 3 minas 1 1/4 siclos

En el siguiente apartado se examinará la forma de realizar 25 x 1/4 que equivale a una división de 25 entre 4.
En todo caso, las operaciones de multiplicación con fracciones se hacen así frecuentes. Cualquier conversión entre unidades de peso implicaba una multiplicación, a veces repetida, por 60. Así, por ejemplo, en el segundo gasto se determina que

13 5/6 minas 2 5/6 siclos de plata = 832 5/6 siclos de plata

lo que implica la realización de la siguiente multiplicación incluyendo el tratamiento de la fracción 5/6:

13 5/6 x 60 = (13 x 60) + (5/6 x 60) = 780 + 50 = 830 siclos plata

Se ha comentado la existencia de un número limitado de fracciones usuales que permitían trabajar con comodidad al escriba. Sin embargo, era inevitable que surgieran otras, ante las que cabía adoptar dos técnicas: Una es la de aproximación admitiendo un pequeño error y otra la reducción de las fracciones a expresiones numéricas que supusiesen una extensión de los números naturales, del mismo modo que actualmente se hace con los decimales.

Respecto a la aproximación, considérese el siguiente ejemplo (Benoit, Chemla y Ritter, 1992, p. 95): *"1/3 mina 6 1/3 siclos de oro (al precio de) 9 menos 1/6 siclos (de plata por) cada (siclo de oro); su precio (es de) 3 5/6 minas 2 2/3 siclos de plata".*

Obsérvese la utilización de la expresión (9 - 1/6) en vez de 8 5/6 siclos, al objeto de simplificar el uso de fracciones. A partir de ello, una forma de eludir esta utilización de fracciones consistiría en reducir las cantidades dadas a la subunidad siclo. De este modo, la cantidad de oro sería:

1/3 mina 6 1/3 siclos = 20 + 6 1/3 = 26 1/3 siclos de oro

A partir de este dato habría de multiplicarse el resultado por (9 - 1/6), relación de los siclos de plata por cada uno de oro:

26 1/3 x (9 - 1/6) =
= (26 x 9) + (1/3 x 9) - (26 x 1/6) - (1/3 x 1/6) =
= 234 + 3 - 4 1/3 - 1/18 = 232 2/3 - 1/18 siclos de plata =
= 3 minas (52 2/3 - 1/18) siclos de plata =
= 3 minas 50 siclos (2 2/3 - 1/18) siclos de plata =
= 3 5/6 minas (2 2/3 siclos - 1/18) de plata.

El resultado que el escriba da (3 5/6 minas 2 2/3 siclos de plata) indica que, a lo largo de todo el proceso, ha despreciado el producto de las dos fracciones 1/3 y 1/6.

Sin embargo, estas técnicas de aproximación no siempre eran aconsejables y el escriba debía disponer de alguna alternativa para realizar un cálculo exacto sin necesidad de operar fracciones. La forma de hacerlo era de la ampliar los números naturales a expresiones correspondientes a subunidades sexagesimales. Así, una cantidad como 3 talentos 24 minas 18 siclos podría escribirse, tomando los siclos como unidad, 3.24.18 en sexagesimal, pero si se tomara a los talentos como unidades, se escribiría 3; 24.18 con la particularidad de que estas expresiones, al igual que las decimales en la actualidad, son susceptibles de operarse del modo habitual. Se encuentran así tablas desde la misma invención de la escritura sexagesimal que servían de ayuda a los escribas en las transformaciones de unas expresiones en otras. Por ejemplo, la siguiente tablilla (Nissen, Damerow y Englund 1993, p. 146) considera como unidad el siclo (gin) refiriendo a ella en forma sexagesimal distintas fracciones de la misma:

- 1/6 gin y 10 se = 0; 13.20
- 1/4 gin = 0; 15
- 1/4 gin y 5 se = 0; 16.40
- 1/3 gin = 0; 20
- ½ gin = 0; 30
- 2/3 gin = 0; 40
- 2/3 gin y 5 se = 0; 45
- 5/6 gin = 0; 50
- 1 gin = 1
- 1 1/6 gin = 1; 10
- 1 1/6 gin y 10 se = 1; 13.20
- 1 1/4 gin = 1; 15

Esto permite realizar operaciones de transformación entre unidades con mucha facilidad. Así, se ha dado antes el caso de cambiar 13 5/6 minas de plata en siclos. Para ello se realizaba,

13 5/6 x 60 = (13 x 60) + (5/6 x 60) = 780 + 50 = 830 siclos de plata

Ahora la operación 5/6 x 60 adopta otra forma: 5/6 de mina se puede escribir 0; 50 tomando a la mina como unidad, de manera que se debería realizar 0; 50 x 60 pero se puede llegar a la regla de que la multiplicación por 60 simplemente permite "correr el" un lugar de forma que

0; 50 minas x 60 = 50 siclos

De este modo, el escriba mesopotámico disponía de varias formas de tratamiento de fracciones que le permitía reducir su cálculo, sea por la vía de la aproximación, la reducción a unidades inferiores o bien transformando las expresiones fraccionarias en la forma sexagesimal correspondiente.

La división y los recíprocos

Como continuación de los ejemplos comerciales anteriores se puede presentar un caso en que existe un intercambio entre estaño y plata, situación muy frecuente en esta vía comercial entre Asiria (que exportaba estaño proveniente de la meseta irania) y la península de Anatolia (donde los asirios importaban plata). El ejemplo es el siguiente (Nissen, Damerow y Englund, 1993, p. 94): *"3 talentos 37 ½ minas de estaño (al precio de) 14 ½ siclos (de estaño por) cada (siclo de plata), su (valor) en plata (es de) 15 minas".*

Ello obliga, en primer lugar, a la transformación del estaño considerado a su peso en siclos: talentos 37 ½ minas = 217 ½ minas = 13.050 siclos de estaño y a su posterior división por el estaño correspondiente a un siclo de plata: 13.050 siclos: 14 ½ siclos = 900 siclos = 15 minas de plata.

Problemas de este tipo, tan frecuentes por otra parte, plantean la necesidad de dividir dos cantidades. Los sumerios no tienen un término específico para esta operación por cuanto su interpretación consistirá en reducirla a la multiplicación por la cantidad recíproca del divisor. De esta forma, consideran:

a: b = a x 1/b

de modo que ello obliga a saber cuál es el recíproco de cualquier número escrito en sexagesimal. Como dicho cálculo no es inmediato en muchos casos, el escriba dispondrá de una tabla de recíprocos de los primeros números (Neugebauer y Sachs, 1986), algunos de cuyos ejemplares se han conservado y muestran los siguientes datos (tabla 1).

En el apartado anterior se planteó la operación

$$25 \times 7\ 1/4 = (25 \times 7) + (25 \times 1/4) = 175 + 6\ 1/4$$

donde se multiplicaba 25 por 1/4, cuestión ahora reducida a la siguiente:

$$25 \times 1/4 = 25 \times 0{,}15 = 6{,}15 = 6\ ¼$$

Número	**Recíproco**	**Número**	**Recíproco**
2	0;30	27	0;02.13.20
3	0;20	30	0;02
4	0;15	32	0;01.52.30
5	0;12	36	0;01.40
6	0;10	40	0;01.30
8	0;07.30	45	0;01.20
9	0;06.40	48	0;01.15
10	0;06	50	0;01.12
12	0;05	54	0;01.06.40
15	0;04	1.00	0;01
16	0;03.45	1.04	0;00.56.15
18	0;03.30	1.12	0;00.50
20	0;03	1.15	0;00.48
24	0;02.30	1.20	0;00.45
25	0;02.24	1.21	0;00.44.26.40

Tabla I

Evidentemente, esta tabla de recíprocos resultaba esencial para que el escriba desarrollara su labor. Es de suponer que fuera memorizada y que las tablillas que se han encontrado responden más bien a ejercicios escolares de repetición o consulta como camino previo a la memorización final. En todo caso, surge inmediatamente la cuestión de cómo construir estos resultados. ¿Qué idea intuitiva, qué modelo subyace a los resultados de esta tabla? Considérese una balanza (Powell, 1995). En uno de los brazos se coloca un peso de una mina. Para equilibrarlo se dispone en el otro brazo dos pesos de 30 siclos cada uno.

Es decir, dos partes de 0; 30 equivalen a la unidad, la mina.

Se pueden establecer otras descomposiciones de la mina en pesos iguales:

2 partes de	30 siclos	2 x 0; 30 = 1
3 partes de	20 siclos	3 x 0; 20 = 1
4 partes de	15 siclos	4 x 0; 15 = 1
5 partes de	12 siclos	5 x 0; 12 = 1
6 partes de	10 siclos	10 x 0; 10 = 1
10 partes de	6 siclos	10 x 0; 06 = 1
12 partes de	5 siclos	12 x 0; 05 = 1
15 partes de	4 siclos	15 x 0; 04 = 1
20 partes de	3 siclos	20 x 0; 03 = 1
30 partes de	2 siclos	30 x 0; 02 = 1
60 partes de	1 siclo	60 x 0; 01 = 1

A partir de esta idea inicial que permite construir los primeros resultados entre diversos números y sus recíprocos, es necesario ir completando la tabla con otros que no son tan inmediatos. Se han estudiado dos posibilidades de actuación por parte de los escribas con este objetivo.

El procedimiento más sencillo consistiría en considerar una de las parejas de la tabla así conseguida, tal como 4 -> 0; 015.

Se puede entonces duplicar uno de los factores y dividir el otro por dos con la seguridad de que el producto de las cantidades resultantes volverá a ser la unidad y se estará, entonces, ante otro caso distinto de recíproco (Neugebauer y Sachs, 1986). Aplicando repetidamente este procedimiento se obtendrían las siguientes parejas:

4	0; 15
8	0; 07.30
16	0; 03.45
32	0; 01.52.30

Algo semejante podría hacerse a partir de otra pareja elemental, con la salvedad de que no solo cabe duplicar y dividir por dos sino, como en la primera pareja resultante, triplicar y dividir por tres:

3	0; 20
9	0; 06.40
18	0; 03.20
36	0; 01.40

Existe un procedimiento complementario, particularmente cuando las cantidades a las que hay que calcular su recíproco son grandes:

- Sea **c** un número en sexagesimal del que se desea calcular su recíproco.
- Sea **a** un número próximo por defecto del que se conoce su recíproco.
- Sea **b** un número tal que cumple la condición: c = b + a.

Entonces

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{b+a} = \frac{1}{a}\,\frac{1}{1+\frac{b}{a}}$$

de modo que conociendo el recíproco de a y el de 1 + b/a se obtiene por multiplicación el resultado deseado. Puede parecer un mecanismo de cierta complejidad a un nivel algorítmico, pero algunas tablillas encontradas sugieren que pudo ser un procedimiento conocido por los escribas.

Por ejemplo, en una se han encontrado los siguientes datos numéricos (Robson 1999):

2	05	12
	25	2.24
	28.48	

Veamos cuál puede ser su interpretación.

Considérense los siguientes números:

Se desea hallar el recíproco de c = 2; 05 considerando a = 0; 05 y, por tanto, siendo b = c - a = 2.

Entonces, el recíproco buscado será:

$$\frac{1}{2;05} = \frac{1}{0;05}\,\frac{1}{1+\frac{2}{0;05}} = 12\,\frac{1}{1+24}$$

$$= 12\,\frac{1}{25} = 12x0;02.24 = 0;28.48$$

Con estos resultados parciales es posible entender las cantidades presentes en la tablilla como un registro de la aplicación de este procedimiento. Un nuevo caso, semejante al anterior, es el siguiente:

2		48	1.15
36	1.40		
2.05			

donde el número para el que se desea hallar el recíproco sería c = 0; 28.48 de manera que se escogiera como

$$\frac{1}{0;28.48} = \frac{1}{0;00.48} x \frac{1}{1 + \frac{0;28}{0;00.48}} = 1.15 \frac{1}{1+35} = 1.15 \frac{1}{36} = 1.15 x 0;01.40 = 2;05$$

a = 0; 00.48 siendo, por tanto, b = 0; 28

Se han examinado dos formas básicas de ir completando el cuadro inicial y calcular el recíproco de cualquier número expresado en sexagesimal, pero ha de dejarse constancia de algunas excepciones. En efecto, los cálculos esenciales de los escribas tratan de hallar el recíproco de un número siempre que tenga una expresión finita. Números como el 7 no presentan recíproco visible porque, si se realiza la división 1:7 en base sexagesimal, resultaría

1/7 = 0; 08.34.17.08.34.17...

y ello es debido a que cualquier resto r en la división sucesiva de 1 entre 7 en sexagesimal, al considerarse la unidad inmediatamente inferior para seguir haciendo la división, ha de transformarse en la cantidad 60 x r de manera que, como 60 no tiene a 7 como factor, resulta imposible que la división efectuada resulte exacta.

Así pues, para que un número tenga como recíproco una expresión finita, debe tener uno o más de los factores primos en que se descompone el número 60, es decir, 2, 3 y 5. Es por ello que los escribas mesopotámicos sólo plantean tablas de números (llamados "regulares") de la forma

$$2^A \text{ x } 3^B \text{ x } 5$$

donde A, B, C son números naturales positivos.

Ello no es obstáculo para que se hayan encontrado tablillas con buenas aproximaciones a los recíprocos de los números no regulares (Neugebauer y Sachs, 1986), como es el caso de:

1.01	0; 00.59.59

1.02	0; 00.58.03.52
1.03	0; 00.57.08.24
1.05	0; 00.55.23.04.30
1.06	0; 00.54.32.43.30
...	...

que alcanzan, como se puede apreciar, gran complejidad. De hecho, una expresión más exacta del último recíproco resulta ser:

1.06 0; 00.54.32.43.38.10...

que difiere en poco de la aproximación considerada.

El cálculo de recíprocos y su manejo algorítmico resulta esencial para el aprendiz de escriba. Quizá sea ése el motivo por el que se han encontrado diversas tablillas como las que ahora se relacionarán, pertenecientes a la colección babilónica de Yale (Neugebauer y Sachs, 1986, p. 17):

1	1	2	2	4; 54
2	0; 30	1	2	
3	0; 20	0; 40	2	
4	0; 15	0; 30	2	
5	0; 12	0; 24	2	
6	0; 10	0; 20	2	

1	1	1; 10	1; 10	2; 51.30
2	0; 30	0; 35	1; 10	
3	0; 20	0; 23.20	1; 10	
4	0; 15	0; 17.30	1; 10	
5	0; 12	0; 14	1; 10	

6	0; 10	0; 11.40	1; 10

Cada una de las tablillas está dividida en cuatro columnas a las que se añade, a la derecha, un número. La primera columna corresponde a una sucesión de números consecutivos disponiéndose en la segunda sus recíprocos. La tercera se obtiene multiplicando estos recíprocos por la constante que aparece alineada en la cuarta columna (en otras tablillas se divide en vez de multiplicar). En todo caso, el número que aparece arriba a la derecha se obtiene sumando los resultados obtenidos en la tercera columna. De esta forma se tiene el siguiente esquema:

x 1/x kx k Σk/x

Un problema final

Como colofón a los cálculos algorítmicos de los mesopotámicos en torno a las operaciones elementales, resulta interesante estudiar una tablilla estudiada por Thureau-Dangin, tal como la mencionan Neugebauer y Sachs (1986, p. 18):

2.23	Cada 7 mina y cada 11 mina
1.31	Cada 13 mina y cada 14 mina
1.17	1 gin, 11 se, 1/3 se de plata
1.11;30	Sea la plata que sube o baja (tal que) el "*mahirum*" sea igual.

El "*mahirum*" venía a ser la cantidad de bienes que se pueden comprar con la unidad de plata. Se puede interpretar que existen cuatro productos: A, B, C y D. El precio de

a = 7 minas de A

b = 11 minas de B

c = 13 minas de C

d = 14 minas de D

es en cada caso el mismo: p = 1 gin (siclo), 11 1/3 se (granos) de plata. Así que el precio por unidad de cada producto será:

p/7 para A
p/11 para B
p/13 para C
p/14 para D

Si se consideraran entonces x minas de cada producto, su precio sería:

p x / 7 x minas de A
p x / 11 x minas de B
p x / 13 x minas de C
p x / 14 x minas de D

Hay que tener en cuenta que el precio p que se ha dado no es divisible por 7, 11, 13 y 14 simultáneamente, de manera que, para encontrar una solución finita en sexagesimal al problema planteado, es necesario que x sí sea divisible de manera finita por estos números. Escogiendo x = 7 x 11 x 13 = 16.41

De este modo, el valor de x minas de cada producto se obtiene multiplicando el precio p conocido por los siguientes valores:

Para A:	x/7 = 11 x 13	= 2.23
Para B:	x/11 = 7 x 13	= 1.31
Para C:	x/13 = 7 x 11	= 1.17
Para D:	x/14 = 11 x 13 / 2	= 1.11;30

que son los números que aparecen en la columna izquierda.

En otras palabras, 16 minas y 41 siclos de cada producto costarán 2.23 p, 1.31 p, 1.17 p y 1.11; 30 p, respectivamente. Todos estos datos pueden disponerse en una tabla de varias columnas al modo de las encontradas en los restos arqueológicos babilónicos:

7	2.23	2.23 p	p	6.22; 30 p
11	1.31	1.31 p	p	
13	1.17	1.17 p	p	
14	1.11; 30	1.11; 30 p	p	

Siendo 6.22; 30 p el total del valor de 16 minas 41 siclos de cada producto.

Capítulo 6
Campos y figuras rectilíneas

Forma de los campos

Siendo la agricultura una de las actividades económicas por excelencia en la historia antigua de Mesopotamia, resulta esencial el cálculo de la superficie de parcelas de tierra dedicadas a esta labor. Considerando dicha extensión es posible realizar una estimación de la cosecha a obtener y, con ella, realizar un reparto conveniente en aquellas que sean de arrendamiento entre el propietario (que usualmente se lleva la tercera parte de lo obtenido) y el campesino que la trabaja. Asimismo, estos cálculos deben formar parte de una contabilidad detallada de la administración regia cuando las tierras cultivadas son de propiedad del templo, del palacio o de algunos de sus funcionarios.

En suma, todo el ciclo económico que se mueve en torno a los productos agrícolas, incluyendo la distribución de raciones, tasas, etc., implica como condición primera un cálculo de la superficie de los campos cultivados. Estos eran de unas formas bastante estandarizadas, fundamentalmente rectangulares, los más frecuentes, y triangulares.

La forma rectangular con una longitud mucho mayor que la anchura se fue imponiendo a medida que pasaba el tiempo como la más aconsejable por distintos motivos. En primer lugar, se dejaba uno de los lados más cortos del campo para que estuviera en contacto con el canal de irrigación que, circulando a cierta altura, dejaba caer el agua a través de una simple boca por todo el campo aprovechando el desnivel. De esta forma, un número crecido de campos estaba en contacto con el canal y se nutría de agua para el riego ordinario. En segundo lugar, los campos rectangulares eran alargados para minimizar el giro de los bueyes que marchaban uncidos al arado. Resultaba más económico disponer largos surcos rectilíneos en los que el agricultor sólo tenía que mantener aproximadamente la misma dirección a lo largo de toda la longitud del campo.

Sin embargo, algunos campos, por las irregularidades del terreno o por motivos anteriores de distribución de la tierra, eran de tipo trapezoidal, con una amplia base rectangular (más o menos irregular) y terminados en una porción de tierra de forma triangular. Así pues, para calcular la superficie de un campo, se parcelaba el campo en franjas rectangulares paralelas a la anchura terminando en la parte triangular, cuando procedía. Todas estas franjas eran objeto de medición en sus longitudes al objeto de calcular posteriormente su área.

De todo ello se colige la necesidad de abordar, en primer lugar, la naturaleza de las unidades de longitud y superficie, herramientas esenciales antes de abordar las técnicas por las que los mesopotámicos realizaban estas mediciones.

Unidades de longitud

Las primeras unidades de medida parecen haber sido las referidas al peso, ya abordadas en el capítulo anterior. Sin embargo, durante el tercer milenio se fueron constituyendo unidades cada vez más estandarizadas tanto de longitud, como de superficie o capacidad. Ello fue impulsado por el nacimiento de las ciudades estado y el crecimiento de las relaciones comerciales entre ellas, así como entre el pueblo y la ciudad, hechos que impulsaban el establecimiento de acuerdos para realizar medidas comunes de los productos intercambiados. El período más importante en este sentido es el que se extiende desde el reinado de Ibbi Sin (Ur, dinastía III) hasta el de Samsu Ditana (Babilonia, dinastía I), aproximadamente desde el 2000 a.C. hasta el 1600 a.C., conocido habitualmente como Antiguo Babilónico (en adelante A.B.). Téngase en cuenta que es un período temporal correspondiente a la segunda mitad del tercer milenio, cuando el poder central es fuerte, pese a la ruptura propiciada por la invasión de los amorreos. Existe entre la dinastía III de Ur y el comienzo de las dinastías babilónicas una relación estrecha, por la cual estas últimas asimilan el modelo administrativo sumerio así como el lenguaje acadio subsiguiente, lo que incluía las formas de medida. El sistema de medida de este período A.B. será denominado también "estándar" y centrará el estudio de este capítulo por cuanto la gran mayoría de los textos matemáticos se agrupan en el período citado.

Existen otros períodos y distintas reformas dentro de la historia mesopotámica, ya que discurre a lo largo de casi tres milenios. Con la presencia casita en Babilonia (el llamado período neobabilónico, N.B.), aproximadamente desde 1600 hasta 1150 a.C. se conocen reformas, así como, posteriormente, en el llamado período babilónico tardío (B.T.), coincidente con la presencia caldea en esta ciudad desde el 625 a.C. hasta la irrupción persa en el 550 a.C.

Por ejemplo, la unidad más pequeña de longitud en el período A.B., el "dedo" (*susi*), aproximadamente de 1,66 cm actuales, cambia en el N.B. para transformarse en una unidad de unos 3,12 cm, es decir, que este último dedo es igual a 1 7/8 del dedo anterior. En el B.T. vuelve a cambiar, quedándose en 2,08 cm, es decir, 1 1/4 del dedo original.

Como es lógico pensar, esto no suponía un cambio caprichoso dado que, según el primer sistema A.B., 30 dedos equivalían a la siguiente unidad de longitud, el codo (*kus*), que era aproximadamente de 50 cm Sin embargo, el dedo posterior característico del B.T., de una longitud algo mayor, implicaba que el mismo codo contaba con 24 dedos, una cantidad más fácilmente divisible en fracciones de codo que el estándar inicial.

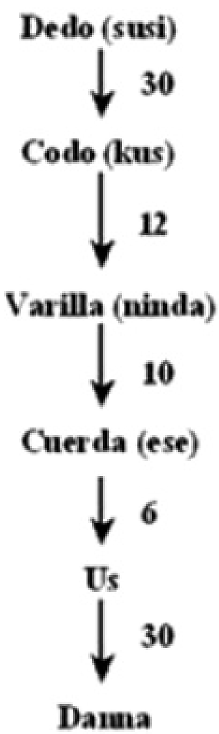

Figura 34

Con todo ello, se pueden ya establecer las principales unidades de longitud del sistema estándar, es decir, el referido al período de la Babilonia antigua, A.B. (figura 34), con la observación de que se presentan tan sólo las principales relaciones enteras entre ellas.

Unidades de superficie

Hay que tener en cuenta que el ninda equivale aproximadamente a unos 6 metros, lo que hace de ella una unidad muy adecuada para medir las longitudes de los campos sin tener que considerar una gran cantidad de unidades (menos que si fuera el codo, por ejemplo) o a una fracción de las mismas, en caso de escoger una unidad mayor (us, danna). Si bien el "ese" (unos 60 metros) toda vía es posible utilizarlo, el "us" ya corresponde a unos 360 metros y el "danna" alcanza los 11 km.

Así pues, si es la unidad ninda la más frecuente en la medición de longitudes de campos, el cuadrado que tuviera un ninda de lado sería la unidad de superficie por excelencia.

Este cuadrado es el llamado huerto (*sar*), unos 36 m^2. El cuadrado de lado un "ese" también recibe una denominación especial, "*iku*". Con ello se va configurando un cuadro semejante al anterior con las principales unidades de superficie utilizadas en el período A.B. (figura 35).

Es conveniente observar algunos aspectos de estas unidades. En primer lugar, las denominaciones recuerdan en algún caso a las de peso, más antiguas, de las que probablemente derivan. Por ejemplo, el sar (al igual que la mina en peso) se divide en 60 partes para obtener el siclo que, a su vez, se divide en 180 partes para alcanzar a medir el grano. Esta pequeña superficie, el grano, equivale a 12 dedos cuadrados.

Debe notarse también la forma de estas unidades, adaptadas a la que presentaban usualmente los campos.

Mientras el sar y el iku son cuadrados básicos, los campos mayores se podían llegar a medir con el ese o el bur, que son rectángulos. En concreto, el ese, equivalente a 6 ikus, resulta ser un rectángulo de un ninda de ancho por un us (60 nindas) de largo. De modo similar, el bur es un rectángulo de un ninda de ancho por un danna de largo.

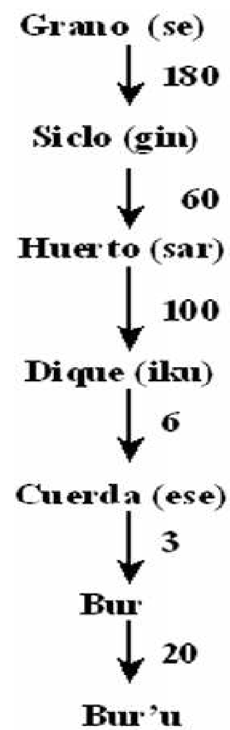

Figura 35

Dado que se presentará algún ejemplo ilustrativo al respecto, conviene mencionar el hecho de que el codo de longitud (aproximadamente 50 cm) conocerá una gran importancia en el período babilónico tardío, de manera que se tomará como unidad de medida de superficie una derivada de los codos cuadrados. Así, se medía en codos las longitudes del campo, se multiplicaban a continuación las dos dimensiones obtenidas para alcanzar codos cuadrados y, finalmente, se transformaba lo obtenido en centenares de codos al cuadrado multiplicando por el coeficiente adecuado:

$$\text{Codos}^2 \times 0;00.00.21.36 = (100 \text{ codos})^2$$

Cuadrados y rectángulos

A partir de estas unidades de medida de superficies es fácil deducir que los cuadrados y rectángulos (más secundariamente, los triángulos) son los elementos básicos en la determinación del área de un campo. Es por ello que las escuelas de escribas debían dedicar un cierto tiempo a la práctica de la operación de multiplicar dos longitudes, sean iguales o dispares, a lo que hay que unir la práctica subsiguiente en la transformación de las unidades resultantes de esta operación. El criterio básico en este sentido consistía en expresar el resultado de la medida con la menor cantidad de unidades posible, al objeto de que operaciones posteriores (como el cálculo del grano necesario para la siembra o la producción prevista) ofreciesen menos dificultad.

Las tablas más sencillas resultan ser las que consisten en elevar al cuadrado una longitud expresada en valores crecientes. Una tablilla encontrada en Susa, por ejemplo, muestra en su comienzo los siguientes resultados (Neugebauer y Sachs, 1986):

1 dedo	= 1/12 grano
2 dedos	= 1/3 grano
3 dedos	= ½ 1/4 grano
4 dedos	= 1 1/3 grano
5 dedos	= 2 1/12 granos
6 dedos	= 3 granos
7 dedos	= 4 1/12 granos
8 dedos	= 5 1/3 granos
9 dedos	= 6 ½ 1/4 granos

Téngase en cuenta que, por ejemplo, considerando la longitud de 6 dedos, el cuadrado que lo tiene por lado tendrá una superficie de 36 dedos^2. Dado que se dispone de la equivalencia

$$1 \text{ grano} = 12 \text{ dedos}^2$$

el escriba puede deducir inmediatamente que

$$(6 \text{ dedos})^2 = 36 \text{ dedos}^2 = 3 \text{ granos}$$

Se realiza así una serie de ejercicios que permiten al escriba una práctica creciente en la multiplicación y cálculo de superficies cuadradas, junto a la transformación de unas unidades en otras superiores. Así,

1 codo 1/3 gin 15 granos

En efecto, 1 codo = 30 dedos, de manera que

$$1 \text{ codo}^2 = (30 \text{ dedos})^2 = 900 \text{ dedos}^2 = 75 \text{ granos}$$

que se pueden transformar en unidades superiores teniendo en cuenta que 1 gin = 180 granos:

$$1 \text{ codo}^2 = 75 \text{ granos} = 1.15 \text{ granos} =$$
$$= 60 \text{ granos} + 15 \text{ granos} = 1/3 \text{ gin } 15 \text{ granos}$$

De igual modo puede tratarse un caso más complicado,

2 ½ codos 2 ½ gin 18 ½ 1/4 granos

debido a las siguientes operaciones que pueden realizarse:

$$(2 \tfrac{1}{2} \text{ codos})^2 = 6\ 1/4 \text{ codos}^2 = 6 \text{ codos}^2 + 1/4 \text{ codos}^2$$

Ahora bien, si 1 codo^2 = 1/3 gin 15 granos entonces 6 codos^2 = 2 gin 90 granos = = 2 ½ gin.

Del mismo modo, como

$$1 \text{ codo}^2 = 60 \text{ granos} + 12 \text{ granos} + 3 \text{ granos}$$
$$1/4 \text{ codo}^2 = 15 \text{ granos} + 3 \text{ granos} + \tfrac{1}{2}\ 1/4 \text{ grano} =$$
$$= 18 \tfrac{1}{2}\ 1/4 \text{ granos}$$

Otra tablilla de Susa (Neugebauer y Sachs, 1986) muestra una estructura muy usual entre las encontradas en forma de tabla: Tres columnas encabezadas esta vez por la denominación de longitud, anchura y área. Se entiende, por tanto, que se refiere a ejercicios similares a los anteriores, pero referidos a campos rectangulares (Tabla 2):

Longitud	**Anchura**	**Área**
½ codo	1/3 codo	12 ½ granos
1 codo	2/3 codo	1/4 gin 5 granos
1 ½ codos	1 codo ½ gin	22 ½ granos
2 codos	1 ½ codos	1 1/4 gin
2 ½ codos	2 codos	2 gin 15 granos
2 2/3 codos	2 ½ codos	2 2/3 gin 20 granos
3 codos	2 2/3 codos	3 1/3 gin
3 2/3 codos	3 codos	4 ½ gin 15 granos
4 codos	3 2/3 codos	6 gin 20 granos
5 ½ codos	4 2/3 codos	10 2/3 gin 5 granos
½ ninda	5 1/3 codos	13 1/3 gin
½ ninda 1 ½ codos	½ ninda	18 2/3 gin 15 granos
½ ninda 2 codos	½ ninda 1 ½ codos	1/3 sar 5 gin

Tabla 2

Varios de los resultados tienen la siguiente explicación:

Longitud = ½ codo, Anchura = 1/3 codo, Área = 12 ½ granos

$$½ \times 1/3 = 0;\ 30 \times 0;\ 20 = 0;\ 10 \text{ codos}^2 = 0;\ 10 \times 1.15 = 12;\ 30$$

granos donde la relación 1 codo^2 = 1.15 granos actúa a manera de coeficiente transformador de una unidad (codo^2) en otra (grano).

Longitud = 1 codo, Anchura = 2/3 codo, Área = 1/4 gin 5 granos

1 x 2/3 = 0; 40 $codos^2$ = 0; 40 x 1.15 = 50 granos = (45 + 5) granos = 1/4 gin 5 granos

Longitud = 1 ½ codo, Anchura = 1 codo, Área = ½ gin 22 ½ granos

1 ½ x 1 = 1; 30 $codos^2$ = (1; 12 + 0; 18) $codos^2$ = ½ gin 22; 30 granos ya que 1 gin = 3.0 granos (180) 1 $codo^2$ = 1.15 granos (75) de modo que la relación directa entre ambos, utilizando el recíproco de 1.15 (0; 00.48) tal como se muestra en la tabla 1, será:

3.0 / 1.15 = 3.0 x 0; 00.48 = 2; 24

es decir, 1 gin = 2; 24 $codos^2$, y, en particular,

½ gin = 1; 12 $codos^2$ tal como se aplica en esta operación.

Al tiempo, 0; 18 $codos^2$ x 1.15 = 22; 30 granos.

Longitud = 3 codos, Anchura = 2 2/3 codo, Área = 3 1/3 gin

3 x 2 2/3 = 8 $codos^2$ = 8 x 0; 25 = 3; 20 gin = 3 1/3 gin

ya que resultará

1 $codo^2$ = 1/ 2; 24 gin. 1 gin = 2; 24 $codos^2$.

Según la Tabla 1, el inverso de 1; 12 es 0; 50, de manera que duplicando y dividiendo por dos, se obtiene fácilmente que el inverso de 2; 24 será 0; 25 de modo que se obtiene la equivalencia 1 $codo^2$ = 0; 25 gin que es la utilizada para la transformación de unidades.

Triángulos

Los documentos matemáticos de la época estudiada son de varios tipos. Neugebauer ya distinguió entre los "textos de problemas" y las tablas. En apartados anteriores se ha comprobado la existencia de estas últimas como una serie de columnas que muestran valores numéricos correspondientes según una relación determinada, sea la de cuadrados, el producto de una multiplicación, carácter de recíprocos, etc. Aún no se han presentado textos de problemas pero serían aquellos donde se dan los datos esenciales y se formula una pregunta que necesita disponer de los primeros. Eventualmente se presenta la solución como una serie de reglas imperativas describiendo la sucesión de operaciones que es necesario realizar para hallar la respuesta requerida. Un texto escueto de problema donde se plantea una pregunta en relación al área de un cuadrado, por ejemplo, sería el siguiente (Neugebauer y Sachs, 1986, p. 10):

> "58; 20
> 58:20
> 56.42; 46.40
> ¿Cuál es el área?
> Su área es 1 bur, 2 ese, 4 iku, 2 2/3 sar, 6 2/3 gin".

Los propios resultados multiplicativos indican que se trata de un campo cuadrado de 58; 20 nindas de lado cuya área es de 56.42; 46.40 sar. Lo que se pretende es transformar esta cantidad de sar en unidades superiores que proporcionen una medida más sencilla numéricamente. Evidentemente, la solución aparece en el mismo problema porque se trata de una tablilla utilizada en la enseñanza y sobre la que el aprendiz de escriba tiene que realizar sus operaciones.

Junto a trabajos más toscos de estudiantes, habitualmente repeticiones de signos o tablas, se ha delimitado desde hace pocos años otro tipo de tablillas que presentan un importante contenido matemático: Las listas de coeficientes. Estos coeficientes son constantes numéricas que presentan una relación y el objeto sobre el que se aplican, pero no hace explícitas las variables que relaciona. Por ejemplo, en el caso de un triángulo, se pueden encontrar los siguientes coeficientes (Robson 1999, pp. 40-41):

A: "0; 30 y 1, los coeficientes de un triángulo".

B: "0; 52.30, la longitud transversal del triángulo".

C: "0; 26.15, el área de un almacén triangular"

D: "0; 57.36, el coeficiente de una esquina".

Estos coeficientes empiezan a cobrar sentido si se tiene en cuenta que los triángulos considerados en el período A.B. al que se refieren todos los que se estudiarán aquí, son rectángulos o equiláteros. Considerando entonces un triángulo rectángulo de cateto un ninda (figura 36), como es habitual en las listas de coeficientes geométricos, el área puede obtenerse sin más que multiplicar la mitad de la base
por la altura, es decir,

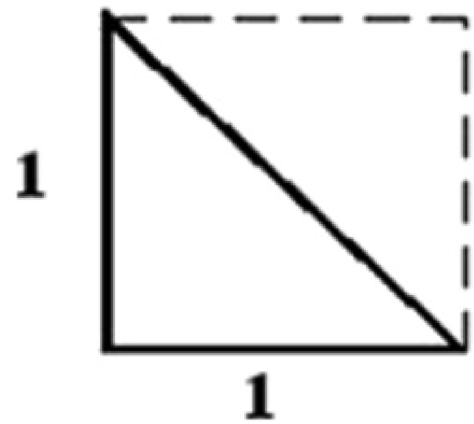

Figura 36

Área = 0; 30 x 1 (coeficientes A)

lo que viene a revelar que el área de un triángulo de estas características se toma como la mitad del cuadrado de la misma base y altura que el triángulo, relación que puede extenderse a cualquier otro triángulo, en particular uno equilátero que, sin embargo, presenta el inconveniente de que la altura no es un valor inmediato.
Para hallarlo actualmente lo hacemos con facilidad usando raíces cuadradas (figura 37). De esta manera

$$h = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Sin embargo, el cálculo de raíces cuadradas (que se abordará en un capítulo posterior más detalladamente) era más complejo entonces por su carácter aproximativo en el caso de las raíces no exactas como la presente.

Por ello se debía utilizar una fórmula que es conocida por obra de Herón en el siglo III d.C (Gheverghese 1996).

Consiste en que si se tiene A, un cuadrado no perfecto, se considera a^2 como el cuadrado más cercano posible al primero, siendo entonces $A = a^2 + b$.

Se puede tomar, paralelamente, otra aproximación a la raíz cuadrada de A:

$$\sqrt{A} \approx a + c$$

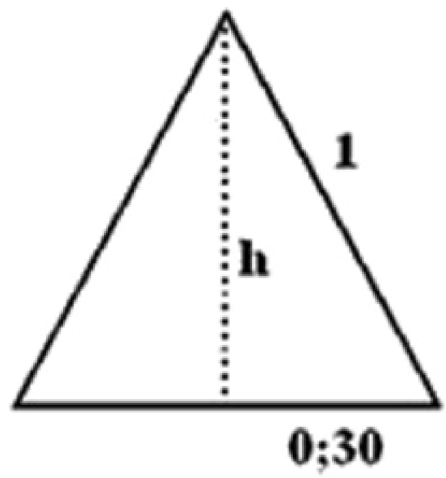

Figura 37

de donde, elevando al cuadrado,

$$A = (a + c)^2 = a^2 + c^2 + 2ac,$$

lo que conduce a igualar ambas aproximaciones:

$$a^2 + b = a^2 + c^2 + 2ac$$

Despreciando el valor de c2 se obtiene el siguiente valor de c:

$$c \approx b/2a$$

de forma que

$$\sqrt{A} \approx a + b/2a$$

sería la aproximación utilizada habitualmente por los escribas mesopotámicos.

De esta forma, teniendo en cuenta que la altura del triángulo es igual a la raíz cuadrada de 3/4, es decir, 0; 45 en sexagesimal, se tendrá la siguiente aplicación:

A = 0; 45

a = 1

0; 45 = 1 - 0; 15 de forma que b = - 0; 15 y

√0; 45 = 1 - 0; 15/2 = 1 - 0; 07.30 = 0; 52.30 (coeficiente B).

El área del triángulo que aparece en la figura 37 será entonces el producto de la semibase por la altura:

A = 0; 30 x 0; 52.30 = 0; 26.15 (coeficiente C)

El significado del último coeficiente es más discutible pero se ha realizado una reconstrucción sobre el caso a que debe referirse (Robson 1999).

Considérese un triángulo rectángulo en las proporciones pitagóricas 3-4-5 pero donde la hipotenusa resulta ser la unidad, tal como sucede en los demás casos planteados en este tipo de tablillas. Si sucede tal caso los catetos se obtendrán dividiendo por 5 (multiplicando por 0; 12) los valores 3 y 4, obteniéndose, respectivamente,

3 x 0; 12 = 0; 36 y 4 x 0; 12 = 0; 48

Así, el área de este triángulo será de:

A = 0; 24 x 0; 3 6 = 0; 14.24

Si se considera entonces el rombo de la figura 38 del cual el triángulo citado sería su cuarta parte, el área total del rombo sería:

A_{ROMBO} = 4 x 0; 14.24 = 0; 57.36 (coeficiente D)

Se ha dicho ya que las áreas triangulares podían resultar al considerar campos trapezoidales. Un caso ilustrativo de este hecho resulta el mostrado a continuación (Nissen, Damerow y Englund, 1993). Se trata de un campo irregular con una vaga forma triangular datado en el período Ur III, hacia el 2100 a.C. El canal de irrigación debía discurrir por su lado más largo, el que registra las medidas más detalladas y es recto (figura 39).

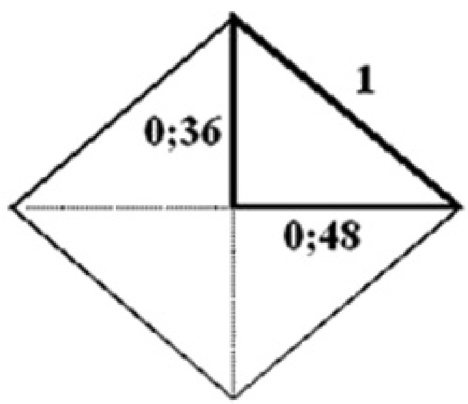

Figura 38

Pues bien, la forma de hallar la superficie total consiste en partir el campo mediante líneas perpendiculares al canal de manera que se formen un total de cuatro trapezoides y dos triángulos en los extremos. Se mide entonces la longitud de esas líneas divisorias en nindas junto a la correspondiente al canal de irrigación, como ya se ha mencionado. La forma de cálculo de estos trapezoides responde al procedimiento aproximativo muy conocido en la antigüedad, que consiste en multiplicar la semisuma de los lados opuestos, en este caso reducidos a dos (los de las líneas divisorias).

Así, de arriba a abajo, se tienen las siguientes superficies trapezoidales:

A_2 = ½ (23 + 21) x 30 = 11.00 sar
A_3 = ½ (21 + 36) x 40 = 19.00 sar
A_4 = ½ (36 + 30) x 80 = 44.00 sar
A_5 = ½ (30 + 25) x 40 = 18.20 sar

a lo que hay que añadir las triangulares de ambos extremos:

A_1 = ½ (10 x 30) = 2.30 sar
A_6 = ½ (25 x 40) = 8.20 sar

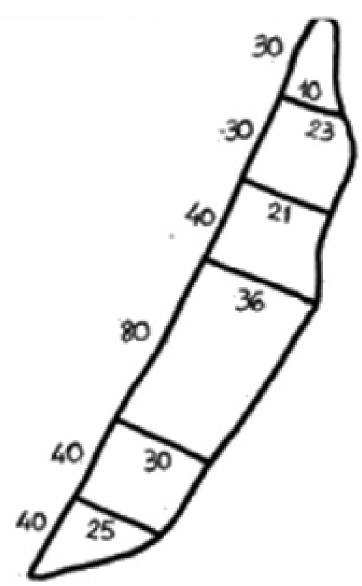

Figura 39

que totalizan

$$A_{CAMPO} = 1.43.10 \text{ sar} = 3 \text{ bur } 1 \text{ ese } 1 \text{ iku } 1.30 \text{ sar}$$

Polígonos regulares

El estudio de los triángulos y otras figuras regulares como los polígonos e incluso los círculos posteriormente, no sólo se justifica por el cálculo de superficies de campos. Resulta difícilmente imaginable que alguno tuviera la forma de un heptágono o un pentágono regulares, por ejemplo. Su aplicabilidad reside más en las construcciones de templos u otro tipo de edificaciones donde algunas de las piezas en juego tuvieran esa forma. El estudio que realizan y que se manifiesta en el uso de coeficientes pone de relieve el dominio de muchas técnicas geométricas entre las cuales cabe citar particularmente la triangularización de los polígonos regulares.

El más sencillo de tratar resulta ser el hexágono (Robson, 1999) que tiene por lado la unidad, puesto que es posible descomponerlo en seis triángulos equiláteros del mismo lado. De esta forma, resulta fácil de explicar Coeficiente: “2; 37.30, el coeficiente del hexágono” en tanto se ha comprobado en el apartado anterior que el área de cada triángulo de lado unidad es

$$A_{TRIÁNGULO} = 0; 26.15$$

de forma que

$$A_{HEXÁGONO} = 6 \times 0; 26.15 = 2; 37.30$$

La cuestión planteada por el heptágono es algo más compleja:

Coeficiente: “3; 41, el coeficiente del heptágono”.

En una tablilla encontrada en Susa, como las aquí estudiadas, se menciona el lado del hexágono como 0; 30 mientras que la figura del heptágono presenta como lado 0; 35 (figura 40).

Ello querría decir que los escribas considerarían esta relación:

Radio Hexágono x 7/6 = Lado heptágono

dado que el radio y el lado coinciden en el Hexágono, de modo que

0; 30 x 7/6 = 0; 35

Si esto es así, al radio unidad del hexágono le correspondería:

1 x 7/6 = 1; 10 (Lado heptágono)

Figura 40

La altura h de cada triángulo de los siete en que quedaría dividido el heptágono sería:

$$h = \sqrt{(1;10)^2 - (0;30)^2} = \sqrt{1;21.40 - 0;15} = \sqrt{1;06.40}$$

Tomando en la aproximación de Herón,

A = 1;06.40, a = 1, b = 0;06.40

resultará

h ≈ 1 + 0; 06.40/2 = 1; 03.20

El área de cada triángulo termina siendo:

$A_{TRIÁNGULO}$ = 1; 03.20 / 2 = 0; 31.40

y el área total del polígono es la que justifica el coeficiente que menciona la tablilla:

$$A_{HEPTÁGONO} = 7 \times 0;\ 31.40 = 3;\ 41.40 \approx 3;\ 41$$

Figura 41

En el caso del pentágono regular la justificación es completamente similar mostrándose el mismo modelo en el tratamiento de los polígonos:

Coeficiente: "1; 40 el coeficiente del pentágono".

Así, considerando

Radio hexágono x 5/6 = Lado pentágono

$$1 \times 5/6 = 0;\ 50$$

A continuación se determina la altura h (figura 41):

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{(0;\ 50)^2 - (0;\ 30)^2} \\ &= \sqrt{0;\ 41.40 - 0;\ 15} \\ &= \sqrt{0;\ 26.40} \approx 0;\ 40 \end{aligned}$$

de manera que el

$$A_{TRIÁNGULO} = ½\ (1 \times 0;\ 40) = 0;\ 20$$

y el área total

$$A_{PENTÁGONO} = 5 \times 0;\ 20 = 1;\ 40$$

Unidades de capacidad

Tras examinar los logros conseguidos por los escribas mesopotámicos en torno a las figuras planas delimitadas por segmentos rectilíneos, es conveniente volver al comienzo del capítulo, cuando se mostraba la aplicabilidad de las medidas de longitud y superficie a la medida de campos. Esta tarea debía complementarse administrativamente con otras relaciones que permitiesen determinar la inversión necesaria en semilla para la siembra del campo, así como la producción previsible de cebada u otro tipo de cereal. Para ello, como paso previo, han de examinarse las unidades de capacidad utilizadas en aquel tiempo.

La capacidad de un recipiente para contener grano, aceite, semillas, leche, aceite o cualquier otro elemento de carácter continuo susceptible de ser almacenado y transportado, fue uno de los primeros intereses de los sumerios. A principios del tercer milenio, en los tempranos tiempos de Uruk, aparecen ya las unidades de peso y capacidad, posiblemente las primeras precediendo a las segundas. Hay que tener en cuenta que la capacidad es más difícil de replicar que el peso, por cuanto los recipientes (cestos, vasijas) debían mostrar inicialmente muchas variaciones por adaptarse al producto que contuvieran.

Al igual que la mina en peso, la ninda en longitud o el sar en superficie, la unidad de capacidad más utilizada era la sila, equivalente aproximadamente a un litro. De esta forma, se tendría la equivalencia aproximada de 2 minas de agua = 1 sila.

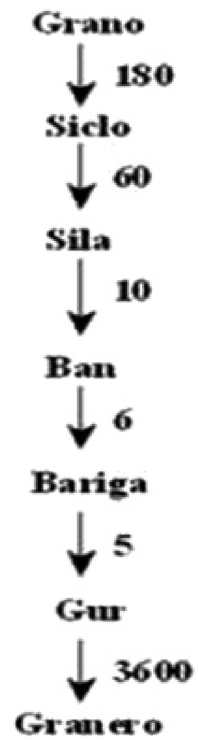

Figura 42

Como en las unidades de superficie esta unidad fundamental se divide en 60 siclos (gin) que, a su vez, se subdivide en 180 granos (se). Los múltiplos son otros (figura 42).

Siembra de campos

Se presenta en primer lugar una interesante tablilla donde se registra la extensión del campo en relación a una cantidad de semilla (Nissen, Damerow y Englund, 1993, p. 63). La columna de la izquierda (figura 43) corresponde a una parte de la tablilla donde se registran una serie de datos en cinco apartados que, de arriba a abajo, significan lo siguiente:

1. 8 bur 3 iku de área de campo para cebada,
2. arado por el buey
3. y sembrado.
4. Cebada para el buey durante el arado: 24 gur 2 bariga.
5. Cebada para la siembra del campo: 12 gur 1 bariga.

De este modo, se tendría una cantidad de 12 gur y 1 bariga de semilla, equivalentes a 3660 silas, para una extensión del campo de 8 bur y 3 iku, equivalentes a 147 ikus. Esta relación supondría que la cantidad de grano destinado a semilla por cada iku de tierra sería de

$$3660 / 147 \approx 25 \text{ silas/iku}$$

Este dato coincide aproximadamente con otros como el reflejado por Margueron (1996):

> *"Algunos documentos administrativos parecen mostrar que se necesitaban unos 500 litros de semilla para una explotación correspondiente a un bur, o sea, unas 6 Ha y que se podían recoger, en el mejor de los casos, de 6.000 a 9.000 litros de grano. El rendimiento -de 10 a 15- sin duda mediocre, no puede considerarse como excepcional. Se puede llegar de este modo a la conclusión de que la reputación de la riqueza de Mesopotamia provenía más de la importancia de las superficies sembradas que de los rendimientos" (p. 129).*

Las cantidades de grano necesarias para la siembra, tal como expresa Margueron, ofrece una relación de algo menos de 28 silas de grano por iku y tal parece que en torno a estas cantidades osciló durante todo el tiempo que aquí se estudia.

Cuestión distinta es la producción, que sufrió importantes variaciones a lo largo de la historia de Mesopotamia, además de ser muy diferente en el norte, fundamentalmente árido y circunscrito a los valles de ambos ríos, y en el sur, donde el delta formado por la desembocadura de ambos y las inundaciones periódicas permitían una productividad muy grande que con el tiempo y la creciente salinidad de los terrenos, fue disminuyendo.

En el estudio detallado que realiza Nemet-Nejat (1982) de los campos babilónicos tardíos, ya en tiempos del rey persa Darío, se presenta uno prácticamente rectangular, con las siguientes dimensiones: 86 y 83 'A codos de ancho y 1090, 1100 codos de largo. A ello se une el interesante dato de que la cantidad de cebada para la siembra de ese campo es de 309 sila siendo conocida la relación por aquella época de 33 1/3 sila empleados en la siembra por cada cuadrado de cien codos de lado.

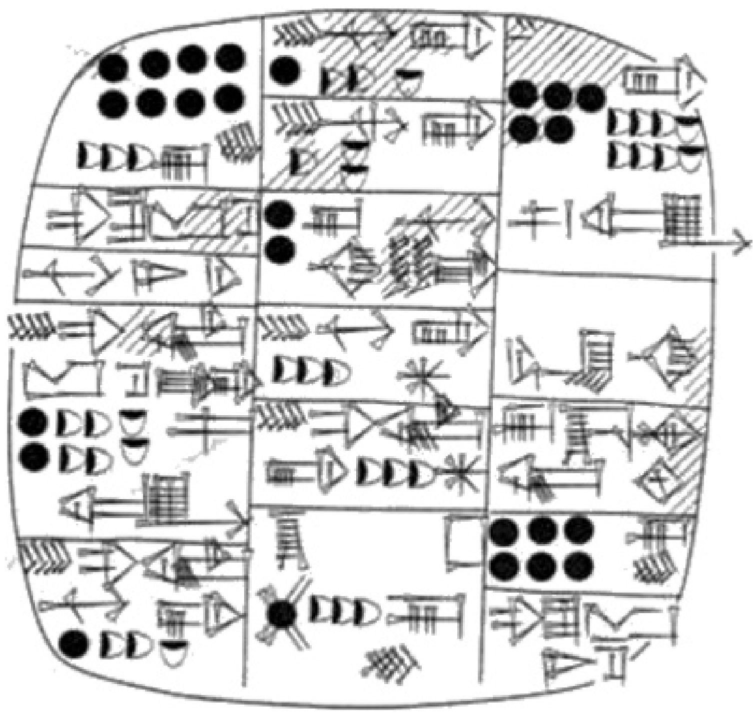

Figura 43

Ello permite, manejando unidades antiguas de superficie y las posteriores, comparar la necesidad de siembra en ambos períodos de tiempo para un campo aproximadamente rectangular de 85 codos por 1095 codos.

Medidas A.B.

85 codos = 7,08 nindas

1095 codos = 91,25 nindas

Área = 7,08 x 91,25 ~ 646 sar = 6,46 ikus

de manera que la relación sería

309 sila / 6,46 ikus = 47,8 silas/iku

Medidas B.T.

Área = 85 x 1095 = 93.075 codos^2 = 9,307 (cien codos)^2

así que la relación buscada sería de

309 sila / 9,307 = 33,2 silas/ (cien codos)^2

Así pues, la cantidad de grano destinado a la siembra es correcta respecto al resto de datos de que se disponía en este período tardío, pero considerablemente mayor, prácticamente el doble, que la característica del primer período, el antiguo babilónico. Ello significa una mayor explotación de la tierra durante el tiempo del dominio persa.

Capítulo 7
Las figuras circulares

Círculos

El cálculo del área del círculo es por naturaleza aproximado y depende del valor de π considerado. Sin embargo, desde los trabajos de Smeur (1969) acostumbra a distinguirse, en las culturas antiguas, el descubrimiento de dos relaciones inicialmente distintas entre los elementos del círculo:

$$\text{Constante I} = \text{Circunferencia} / \text{Diámetro}$$

$$\text{Constante II} = \text{Área} / \text{Radio}^2$$

La cuestión lingüística en Mesopotamia ya indica cierta preferencia por la primera constante. En efecto, la palabra "kippatum" que designa el círculo es la misma que se emplea para describir la circunferencia lo que sugiere que el círculo se conceptualizó a partir de la circunferencia. En otras palabras, sería el trazado de la circunferencia el que permitiera considerar el área del círculo y no la consideración de su radio. Los coeficientes empleados inciden en la misma interpretación:

- Coeficiente A: "0; 05 coeficiente del área del círculo".
- Coeficiente B: "0; 20 el diámetro del círculo".
- Coeficiente C: "0; 10 el radio del círculo".

Un problema donde se calculan los elementos fundamentales del círculo será especialmente ilustrativo de la secuencia de operaciones efectuadas (Robson 1999, p. 36).

> *"Triple 1; 40, encima del registro, saldrá 5 la circunferencia del registro. El cuadrado de 5 saldrá 25. Multiplicar 25 por 0; 05, el coeficiente, y saldrá el área, 2; 05"*

Las operaciones indicadas se refieren a los siguientes cálculos:

En primer lugar, se considera el diámetro 1; 40 y, para hallar la circunferencia, se multiplica por 3 obteniéndose

$$3 \times 1;\ 40 = 5$$

Esto indica que el escriba considera C = 3 d relación muy conocida en la Antigüedad por su sencillez, teniendo como origen, probablemente, la misma relación entre el diámetro y el perímetro del hexágono regular que puede construirse a partir de la mitad de ese diámetro.

A continuación se eleva al cuadrado la longitud de la circunferencia de forma que, para hallar el área del círculo, se considera

$$A = 0;\ 05 \times C^2 = C/12 \text{ (coeficiente A)}$$

El origen de esta relación puede haber sido meramente empírico aunque es deducible también con bastante sencillez aritmética del hecho de que el área del círculo puede considerarse intermedio entre la del cuadrado inscrito ($d^2/2$) y la del inscrito (d^2) lo que daría lugar a tomar (Maza 2000)

$$A = \frac{3}{4}d^2 = \frac{Cd}{4} = \frac{C\frac{C}{3}}{4} = \frac{1}{12}C^2$$

En todo caso, de la misma relación C = 3d se deduce inmediatamente

$$d = 1/3\ C = 0;\ 20\ C \text{ (coeficiente B)}$$
$$r = d/2 = 0;\ 10\ C \text{ (coeficiente C)}$$

Los círculos no sólo se referían a elementos de la construcción de edificios sino que cabía la posibilidad de trabajar sobre un terreno circular, tal como se muestra en el siguiente problema (Bunt, Jones y Bedient 1988, p. 61):

> *"Trazo el límite de la ciudad. No conozco su longitud. Ando 5 desde el primer círculo a partir del centro en todas las direcciones y trazo un segundo límite. El área entre ellos de 6.15. Encontrar el diámetro de la vieja y la nueva ciudad".*

La forma de resolución, como es habitual, se muestra a través de una serie de instrucciones:

- "Multiplica el 5 de incremento por 3, tienes 15.
- Toma el recíproco de 15 y multiplícalo por 6.15, el área encerrada, tienes 25.
- Escribe 25 dos veces.
- Añade el 5 que andas, para el resultado obtenido, y también resta este 5 de ello.
- Encuentras 30 para la nueva ciudad y 20 para la ciudad vieja".

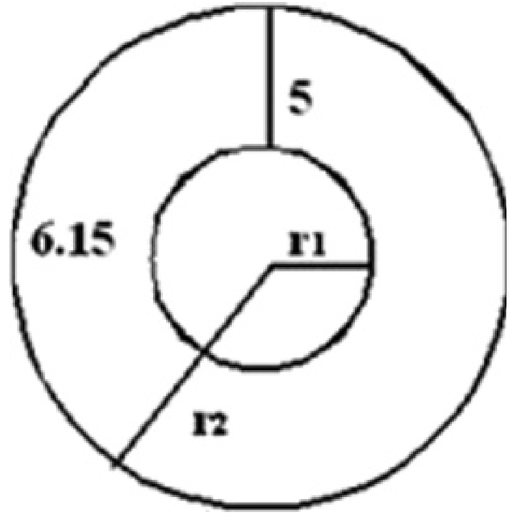

Figura 44

La interpretación de las operaciones efectuadas sería la siguiente (figura 44)

$$C_1 = 3\ d_1 = 6\ r_1$$
$$C_2 = 3\ d_2 = 6\ r_2$$
$$A_1 = 0;\ 05\ (6\ r_1)^2 = 0;\ 05 \times 36\ r_1^2 = 3\ r_1^2$$
$$A_2 = 3\ r_2^2$$

de manera que la diferencia de áreas será:

$$A_{CORONA} = A_2 - A_1 = 3\ (r_2^{\ 2} - r_1^{\ 2}) = 3\ (r_2 - r_1)\ (r_2 + r_1)$$

Y ahora se pueden aplicar los datos conocidos:

$$6.15 = 3 \times 5 \times (r_2 + r_1)$$

de modo que primero se multiplica 3 x 5 para hallar a continuación el recíproco de este resultado y multiplicarlo por 6.15. Se obtiene así 25 que corresponde a

$$r_2 + r_1 = 25$$

a lo que hay que unir

$$r_2 - r_1 = 5$$

de manera que sumando se obtiene:

$$2 r_2 = 30 = d_2$$

y restando:

$$2 r_1 = 20 = d_1$$

tal como señala la solución del problema.

Fracciones de círculo

El interés de los escribas mesopotámicos no se reduce al círculo sino que considera como figuras de interés especial determinadas fracciones del mismo: el semicírculo, un tercio y un cuarto de círculo. Todo ello en base, como se verá más adelante, a establecer sus elementos más fundamentales (área, diámetros, sector circular), paso previo a su utilización como elementos básicos de construcción.

Semicírculo

Respecto al semicírculo, los coeficientes que se consideran son los siguientes (Robson, 1999):

- Coeficiente A: "0; 40, el diámetro del semicírculo".
- Coeficiente B: "0; 20, el radio del semicírculo".
- Coeficiente C: "0; 02.30, coeficiente de un semicírculo".
- Coeficiente D: "0; 10, del área del semicírculo".
- Coeficiente E: "0; 15, el coeficiente del semicírculo".
- Coeficiente F: "0; 45, del área del semicírculo".

Si S es la longitud de la semicircunferencia, será la mitad de la circunferencia completa de manera que, como C = 3 d, resultará (figura 45):

$$S = 1;\ 30\ d$$

Pues bien, de esta forma puede determinarse el diámetro d a partir de la semicircunferencia:

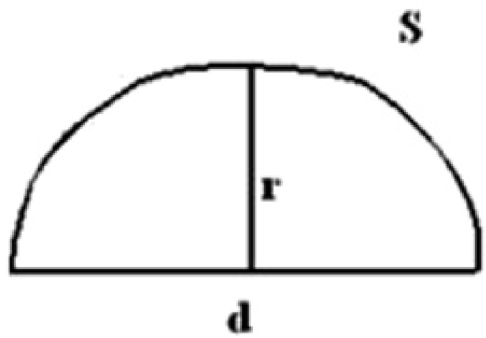

Figura 45

$$d = 1/1;\ 30\ S = 0;\ 40\ S \text{ (coeficiente A)}$$

Naturalmente, el radio será la mitad:

$$r = ½\ 0;\ 40\ S = 0;\ 20\ S \text{ (coeficiente B)}$$

Respecto al área, se sabe que en el caso del círculo AC = 0; 05 C^2 de manera que el del semicírculo se reduciría a la mitad,

$$A_S = ½\ 0;\ 05\ C^2 = 0;\ 02.30\ C^2 \text{ (coeficiente C)}$$

pero no debía ser usual expresar el área del semicírculo mediante elementos del círculo (circunferencia C). Por ello también se debía realizar lo siguiente:

$$AS = ½\ 0;\ 05\ C^2 = ½\ 0;\ 05\ (2\ S)\ 2 = 0;\ 05\ (2\ S^{2)} = 0;\ 10\ S^2 \text{ (coeficiente D)}$$

Sabiendo, no obstante, que S = 1; 30 d, se puede eventualmente expresar este resultado de otro modo:

$$A_S = 0;\ 10\ S\ (1;\ 30\ d) = 0;\ 15\ S\ d \text{ (coeficiente E)}$$

Y aún, sabiendo que S = 3 r, de igual manera:

$$A_S = 0;\ 15\ (3\ r)\ d = 0;\ 45\ r\ d \text{ (coeficiente F)}$$

Tercio de círculo

El cálculo de áreas de figuras limitadas por líneas curvas prosigue con la consideración de la tercera parte del círculo.

- Coeficiente A: "0; 30, el radio del área del arco".
- Coeficiente B: "0; 52.30, el diámetro del área del arco".
- Coeficiente C: "0; 06.33.45, coeficiente del área del arco".

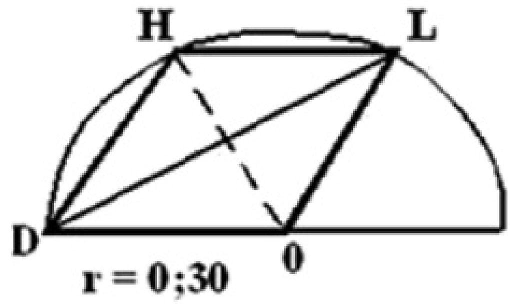

Figura 46

- Coeficiente D: "0; 16.52.30, el coeficiente del ojo de buey".

Se considera que la tercera parte de la circunferencia, como en casos anteriores, tiene por arco DHL la unidad (figura 46). En ese caso, la circunferencia tendrá de longitud 3 y el área del tercio de círculo será:

$$A_{TERCIO} = 1/3\ 0;\ 05\ C\ 2 = 0;\ 01.40 \times 9\ 2 = 0;\ 15$$

Pues bien, el diámetro d será, según la fórmula del semicírculo,

$$d = 0;\ 40\ S = 0;\ 40 \times 1;\ 30 = 1$$

de donde

$$r = ½\ d = 0;\ 30 \text{ (coeficiente A)}$$

En la figura 46 se puede comprobar que el cuadrilátero HLOD es un rombo que tiene por lado el propio radio de longitud 0; 30 y está formado por dos triángulos equiláteros HOL y HOD. Por ser este tipo de triángulos, el área de cada uno de ellos será, por aplicación de lo obtenido anteriormente para triángulos:

$$A_{HOL} = A_{HOD} = (0;\ 30)^2 \times 0;\ 26.15 = 0;\ 06.33.45$$

de modo que el rombo completo:

$$A_{HLOD} = 2 \times 0;\ 06.33.45 = 0;\ 13.07.30$$

Ahora bien, el área de este rombo es igual al semiproducto de sus diagonales, de donde podemos deducir el valor de la diagonal mayor:

$$A_{HLOD} = \tfrac{1}{2}\,(DL \times 0;\ 30) = 0;\ 13.07.30$$
$$DL \times 0;\ 30 = 0;\ 26.15$$
$$DL = 2 \times 0;\ 26.15 = 0;\ 52.30 \text{ (coeficiente B)}$$

El último coeficiente no se refiere tanto al área del rombo (que resulta auxiliar) como al "área del arco" y muestra un elemento que luego es utilizado al tratar otro tipo de figuras. Así, el tercio de círculo, de área total 0; 15, se puede dividir en dos partes, una de tipo triangular (A_1) y otra delimitada por el arco (A_2) (figura 47). El área triangular se hallará teniendo en cuenta la base del triángulo isósceles que lo constituye (DL) y la altura del mismo, que es igual a la mitad del radio (0; 15) tal como aparece en la figura 46:

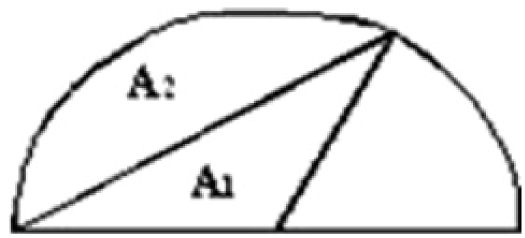

Figura 47

$$A_1 = \tfrac{1}{2}\ 0;\ 15 \times 0;\ 52.30 = 0;\ 06.33.45 \text{ (coeficiente C)}$$

de manera que el área limitada por el arco del tercio de circunferencia, el denominado "ojo de buey", será:

$$A_2 = 0;\ 15 - 0;\ 06.33.45 = 0;\ 16.52.30 \text{ (coeficiente D)}$$

Cuarto de círculo

La división del círculo en cuatro partes iguales viene a completar las particiones de un objeto más usuales, en mitad, tres y cuatro partes. Téngase en cuenta que la

división entre cinco no era frecuente y la realizada en seis partes es deducible de las anteriores. De manera que se presentan también unos coeficientes asociados a cálculos sobre un "campo de grano", como se denominaba esta porción de círculo.
Coeficiente A: "0; 13.20, el coeficiente de un campo de grano".
Para que el arco del cuarto de círculo, como en casos anteriores, tenga por longitud la unidad, la circunferencia C = 4 (figura 48), de manera que el diámetro resultante del círculo será:

$$d = 0;\ 20\ C = 0;\ 20 \times 4 = 1;\ 20$$

Del mismo modo, el área del cuarto de círculo resultará ser:

$$A_{CUARTO} = 1/4\ 0;\ 05 \times 4^2 = 0;\ 20$$

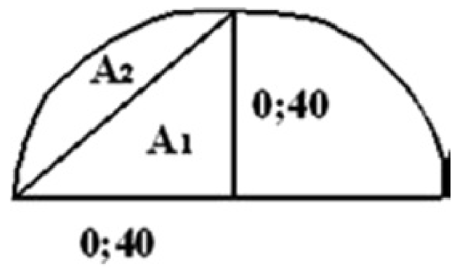

Figura 48

De nuevo, el cuarto de círculo puede dividirse en dos áreas, una triangular (A_1) y otra delimitada por el arco (A_2).
Sus áreas se pueden calcular con facilidad:

$$A_1 = ½\ 0;\ 40 \times 0;\ 40 = 0;\ 13.20 \text{ (coeficiente A)}$$
$$A_2 = A_{CUARTO} - A_1 = 0;\ 20 - 0;\ 13.20 = 0;\ 06.40$$

superficie que será utilizada en la siguiente figura.

Cuadrado cóncavo

Una aplicación inmediata de una de las áreas asociadas al cuarto de círculo la constituye la determinación del área de un cuadrado cóncavo. En efecto, dicha figura está formada por la parte interior que queda tras el trazado de los llamados "ojos de buey" completos en cada cuarto de círculo (figura 49).

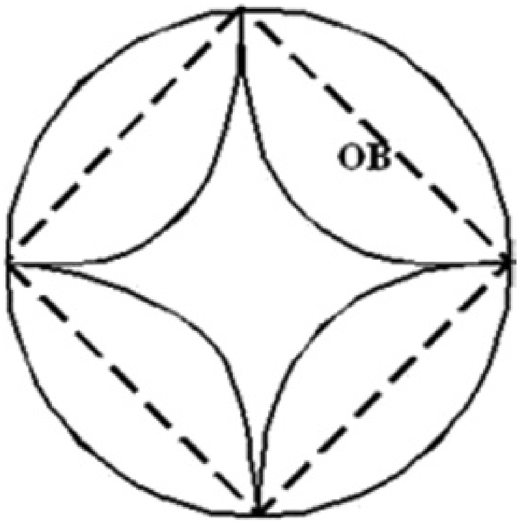

Figura 49

- Coeficiente A: "0; 26.40, coeficiente de un cuadrado cóncavo".
- Coeficiente B: "0; 53.20, el área de un harpa".

Cada uno de estos "ojos de buey" consistirá en un área doble de la A_2 obtenida antes, de manera que

$$A_{OB} = 2 \times 0; 06.40 = 0; 13.20$$

Los cuatro tendrán por superficie:

$$A_{TOTAL} = 4 \times 0; 13.20 = 0; 53.20$$

Como el área del círculo que tiene por circunferencia 4 es

$$A_{CIRCULO} = 0; 05 \times 4^2 = 1; 20$$

$$A_{CONCAVO} = A_{CIRCULO} - A_{TOTAL} = 1; 20 - 0; 53.20 = 0; 26.40 \text{ (coeficiente A)}$$

Se ha visto anteriormente que cada triángulo correspondiente al cuarto de círculo tiene por superficie,

$$A_1 = 0; 13.20$$

de modo que el cuadrado completo (denominado "harpa"), es

$$A_{CUADRADO} = 4 \times 0; 13.20 = 0; 53.20$$

lo que permite deducir que el cuadrado cóncavo tiene por superficie la mitad del cuadrado indicado.

La tablilla BM 15285

La tablilla así denominada (figura 50) contiene una serie de ejercicios geométricos de cálculo de áreas en figuras derivadas de las vistas a lo largo de este capítulo y el anterior. Una parte de ella está erosionada pero se han conservado un total de 31 de estos problemas con la particularidad no frecuente de que se presenten junto a las figuras dibujadas a que se refiere su texto (Robson, 1999).

Figura 50

Estas figuras están hechas con plantillas, dada la igualdad que muestran, comprendiendo un cuadrado grande de unos 3 dedos de longitud (48 mm.) mientras que los círculos interiores suelen tener de longitud 1½ dedos aproximadamente (22 mm.). Es por ello que, aunque no se diga explícitamente en los textos del escriba, se considere que el cuadrado o círculo interiores tienen como lado o diámetro, la mitad (30 nindas) del que los contiene, que suele presentarse como de un us de longitud (1.00 nindas).

Problema 1

El lado del cuadrado es 1 us (figura 51). Dejo un borde a cada lado y dibujo un segundo cuadrado. Dentro del cuadrado dibujo un círculo. ¿Cuáles son las áreas?

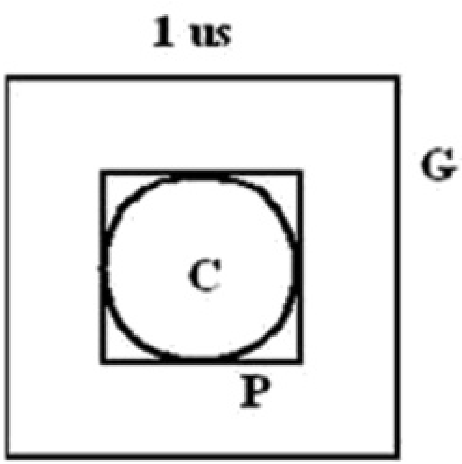

Figura 51

Se tiene entonces que si el lado del cuadrado G es 1.00 nindas y el del pequeño P es 30 nindas, su área será, respectivamente,

$$A_G = 1.00^2 = 1.00.00 \text{ sar}$$

$$A_P = 30^2 = 15.00 \text{ sar}$$

de donde el área rectilínea intermedia será:

$$A_G - A_P = 45.00 \text{ sar}$$

A su vez, el área del círculo C se obtendrá calculando primero su circunferencia para el diámetro 30 para luego aplicar la fórmula que proporciona esa área:

$$c = 3\ d = 3 \times 30 = 1.30 \text{ ninda}$$

$$A_C = 0;\ 05 \times 1.30^2 = 0;\ 05 \times 2.15.00 = 11.15 \text{ sar}$$

obteniéndose así que el área comprendida entre el cuadrado P y el círculo C sería:

$$A_P - A_C = 15.00 - 11.15 = 3.45 \text{ sar}$$

Problema 2

El lado del cuadrado es 1 us (figura 52). Dibujo un cuadrado. El cuadrado que dibujo toca al primer cuadrado.

Dentro del segundo cuadrado dibujo un tercer cuadrado. El cuadrado que dibujo toca al segundo cuadrado. ¿Cuál es el área?

Considerando las líneas auxiliares discontinuas marcadas es fácil constatar que el nuevo cuadrado intermedio I es la mitad del cuadrado G

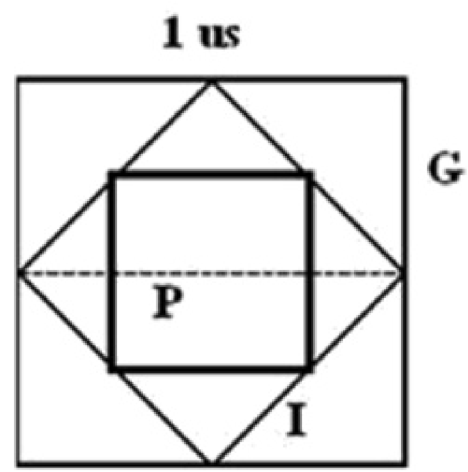

Figura 52

$$A_I = ½\ 1.00.00 = 30.00 \text{ sar}$$

y del mismo modo podría comprobarse geométricamente que su área debe ser el doble que la del cuadrado P.

Problema 3

El lado de un cuadrado es 1 us (figura 53). Dentro dibujo cuatro trapecios y dos triángulos. ¿Cuáles son sus áreas?

Los cuatro trapecios resultan ser los de las esquinas y su área puede obtenerse dividiendo en cuatro partes iguales el área del cuadrado G que resulte cuando se le resta el rombo interior formado por dos triángulos.

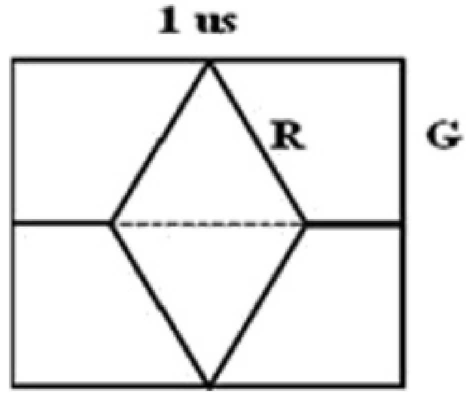

Figura 53

El área de este rombo podría obtenerse de dos maneras. Dejando a un lado la posibilidad de multiplicar el semiproducto de las diagonales, la más sencilla consistiría en calcular la superficie ocupada por cada uno de los cuatro triángulos rectángulos iguales en que se puede dividir el rombo:

$$A_t = ½\ 15 \times 30 = 3.45 \text{ sar}$$

de manera que el área del rombo R sería:

$$A_R = 4 \times 3.45 = 15.00 \text{ sar}$$

que coincide con el área del cuadrado P encontrada en problemas anteriores.
Pues bien, el área ocupada por los trapecios sería:

$$A_G - A_R = 1.00.00 - 15.00 = 45.00 \text{ sar}$$

encontrándose entonces que:

$$A_{TRAPECIO} = 1/4 \times 45.00 = 0;\ 15 \times 45.00 = 11.15 \text{ sar}$$

Problema 4

El lado del cuadrado es 1 us. Dentro de él hay dos semicírculos, 1 triángulo, 1 cono, 1 rectángulo y 4 cuadrados. ¿Cuáles son sus áreas?
La interpretación del texto podría ser la de la figura 54, un triángulo y dos semicírculos interiores al cuadrado G de 1 us de lado.

Si el cuadrado interior tiene un lado de 30 nindas, entonces los cuadrados de las esquinas serán de 15 nindas de lado, siendo su área,

$$A_{PEQUEÑO} = 15 \times 15 = 3.45 \text{ sar}$$

Respecto a cada uno de los semicírculos S, la semicircunferencia vendrá dada por:

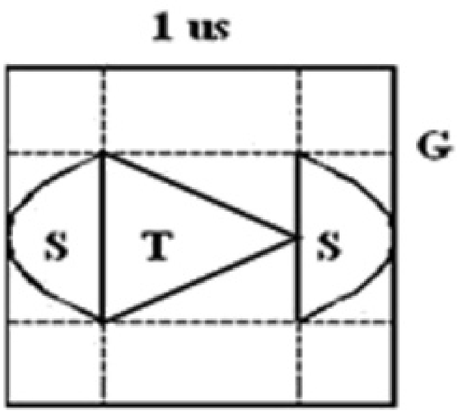

Figura 54

$$s = 1; 30\ d = 1; 30 \times 30 = 45$$

de donde su área:

$$A_S = 0; 10 \times s2 = 0; 10 \times 452 = 5.37; 30 \text{ sar}$$

mientras que el área del triángulo interior T será

$$A_T = ½\ 30 \times 30 = 7.30 \text{ sar}$$

Capítulo 8
Reparto de herencias

Reparto de herencias

El origen de los núcleos familiares es claramente tribal en la medida en que los primitivos sumerios y, particularmente, los acadios que formaron en su síntesis la primera gran cultura mesopotámica, tenían ese origen. La tribu e incluso una alianza de ellas, el clan, debió tener una fortaleza hasta principios del tercer milenio que fue descendiendo con la urbanización. En el segundo capítulo se ha trazado un cuadro familiar y social que inicialmente estaba presidido por los ancianos o patriarcas de la familia reunidos al objeto de tomar las decisiones oportunas para la tribu. Estas relaciones se mantuvieron cierto tiempo entre los grupos seminómadas, ganaderos, habitantes del campo y dependientes de la agricultura, pero no en las ciudades. En ellas, la sociedad alcanzó pronto una jerarquización en torno a los reyes y las actividades económicas se estructuraron dependiendo del templo y el palacio.

La urbanización y este tipo de relaciones condujeron a dar una importancia cada vez mayor al núcleo familiar básico, hecho que es evidente ya en el período Antiguo Babilónico que se inicia a principios del segundo milenio.

Esta situación se fue extendiendo hasta alcanzar a las familias que trabajaban el campo en la medida en que dicho trabajo se realizaba dependiendo de los centros económicos ciudadanos.

Las familias así constituidas siguen siendo, pese a los cambios, patrilineales. El jefe de la familia, el patriarca de la misma, tiene un amplísimo poder de decisión, prácticamente absoluto, de manera que todo lo adquirido por la familia pasa a ser de su propiedad. En el momento del fallecimiento del patriarca, sus posesiones se dividen entre sus hijos, incluso los adoptados, así como las líneas masculinas supervivientes, de manera que si uno de los hijos hubiera muerto en el tiempo del reparto de la herencia, su parte pasaría a su descendencia masculina.

Ahora bien, había fuerzas e intereses que aconsejaban no fragmentar la herencia en exceso, sobre todo cuando se refería a las tierras familiares. En primer lugar, un terreno pequeño no permite utilizar medios adecuados (arados, tipos evolucionados de hoces) por ser poco rentable su inversión, lo que repercute en la producción. En segundo lugar, es necesario dejar tierras en barbecho cada año pero ello se hace imposible con una parcela demasiado pequeña, lo que llevaría a un empobrecimiento del terreno y nuevamente a un descenso productivo. Por último y como aspecto realmente importante, ha de recordarse que la forma alargada de los terrenos permite el riego a la parte de los mismos más cercana al cabal de irrigación pero no a otras partes en que eventualmente se dividiera.

Estos problemas tienen dos soluciones posibles en el caso del reparto de la herencia: O bien se deja una parte importante a uno de ellos (el primogénito) o las tierras se explotan de forma comunal. Las dos posibilidades parecen haberse dado en la historia de Mesopotamia, si bien es posible que la explotación conjunta fuera más usual en los tiempos arcaicos mientras que los privilegios del primogénito resultaban más destacados a partir del tercer milenio. Se tienen pocos testimonios de lo primero, el más importante de los cuales resulta ser el obelisco de Manistusu, donde en tiempos arcaicos se documenta la venta de una tierra por hasta ocho hermanos propietarios. Son más frecuentes, por recientes, los testimonios sobre una preeminencia del primogénito.

Privilegios del primogénito

En el período A.B. es necesario distinguir los códigos sucesorios oficiales (el más conocido, el de Hammurabi) que afirman de manera general la necesidad de realizar un reparto igualitario entre los herederos reservando al patriarca la posibilidad de mejorar al primogénito, y los casos prácticos donde se observan distintas tradiciones. Pese a la escasez de tablillas que especifiquen los repartos efectuados, se puede detectar con cierta regularidad en lo encontrado (Benoit, Chemla y Ritter, 1992) una tendencia igualitaria en el norte (Sippar) y otra de privilegio del primogénito al sur (en Larsa recibía el doble, en Ur y Nippur, un 10 % más que los restantes hermanos), probablemente por diversas tradiciones en este sentido.

Así pues, hay diversas formas de favorecer al primogénito:

1. Adjudicándole dos partes por cada una de sus hermanos.
2. Haciendo que se lleve un 10 % más que el resto de sus hermanos.

3. Dándole la oportunidad de ser el primero que elija su parte después del reparto igualitario, mientras que los demás reciben la parte correspondiente por sorteo. En particular, no es extraño ver casos en que tiene prioridad sobre la casa familiar.
4. Otorgándole los cargos del templo o prebendas (con sus correspondientes raciones) de que disfrutara el legador.

Un caso sencillo es el datado en el tiempo del rey Rin-Sin (hacia 1800 a.C.). Se trata de dividir la casa familiar en tres partes de manera que el primogénito reciba 2/3 sar, el siguiente $^{1}/_{3}$ sar más 10 gin y el pequeño ½ sar. Ello querría decir que la casa tenía la siguiente extensión:

$$2/3 \text{ sar} + 1/3 \text{ sar } 10 \text{ gin} + ½ \text{ sar} = 1 ½ \text{ sar } 10 \text{ gin} = 100 \text{ gin}$$

Si se reduce a gin la extensión total se comprueba que el primero recibe, dado que cada sar equivale a 60 gin,

$$^{2}/_{3} \text{ sar} = 40 \text{ gin}$$

y los restantes:

$$^{1}/_{3} \text{ sar } 10 \text{ gin} = 30 \text{ gin}$$

$$½ \text{ sar} = 30 \text{ gin}$$

En otras palabras, el primogénito ha recibido un 10 % más que sus hermanos.
No es habitual que los documentos que reflejan los repartos hagan constar la cantidad global que se reparte inicialmente. Por ello resulta excepcional un documento encontrado en Ur (Benoit, Chemla y Ritter, 1992) donde se afirma que el objeto a repartir son las cuatro habitaciones de una casa con un total de 52 gin. Luego se afirma que el primogénito recibe 17 gin mientras que a los tres hermanos

restantes les corresponden 11 $^2/_3$ gin a cada uno. Ello, efectivamente, hace un total de

$$17 + 5 \times 11\ ^2/_3 = 52 \text{ gin}$$

pero en este caso la parte adicional del primogénito era de:

$$17 - 11\ ^2/_3 = 5\ ^1/_3 \text{ gin}$$

que no corresponde a la cantidad habitual. En efecto, el 10 %de la cantidad a repartir sería de 5 gin y $^1/_5$ gin que el escriba redondea al objeto de facilitar los cálculos y eludir el empleo de la fracción $^1/_5$, no habitual.

Si el reparto fuera el que adjudicara una parte doble al primogénito, entonces habría que realizar una división de lo heredado (52 gin) en cinco partes iguales, adjudicando dos de ellas al mayor. Así,

$$52: 5 = 52 \times 0; 12 = 10; 24$$

de manera que el mayor recibiera 20; 48 gin y 10; 24 gin cada uno de los demás.

Incluso cabe la posibilidad de repartir entre los hermanos de manera proporcional a su edad relativa. Éste es uno de los problemas que presentan Neugebauer y Sachs (1986):

> *"1 mina de plata de 5 hermanos. Tienen (como diferencia entre las partes) dos hermanos lo (que) el pequeño; un hermano excede al (siguiente) hermano (por esta cantidad): 4, 8, 12, 16, 20"* (p. 100).

Lo que plantea es una progresión aritmética siendo la diferencia entre sus cinco cantidades la parte correspondiente al hermano más pequeño, de forma que si éste recibe 4, el siguiente tendrá 8, 12 el tercero, 16 y 20 los siguientes. Es posible apreciar cómo estos repartos proporcionales entre herederos están la base de los problemas que se abordarán más adelante sobre este tipo de actividad matemática, fundamento de algunos de los problemas conocidos del álgebra mesopotámica.

Pero volviendo a las herencias se mostrará por último un caso muy completo (Postgate, 1999) donde se reparten todo tipo de posesiones entre cuatro hermanos (Sallurum, Apiyatum, Ziyatum y Lugatum) en Nippur. En primer lugar se menciona la parte adicional que se lleva el hermano mayor por el hecho de serlo:

> "*$^5/_6$ de sar de casa construida, junto a la casa de su parte; ½ iku 20 sar de campo "marra", cerca de su parte; 1 mesa de santuario; 3 ovejas; 3 "bushels" de betún seco...; ½ siclo de plata..., una décima de la Gran Puerta, la parte preferente de la condición de hermano mayor"* (p. 125).

A lo que se añade la parte propiamente dicha, equivalente a la de sus hermanos:

> *"1 sar 5 gin de casa construida, parte de su padre; 1 sar de campo yermo junto a la casa de Lugatum; 1 iku y medio 30 sar de campo "marra"..., 1 buey..., 1 vaca...; 8 ovejas, un cuarto de la prebenda de la Gran Puerta; 1 carro, sin terminar, 1 siclo y medio de plata, 1 muela de alfarero, el asa unida, 1 puerta de madera...".*

Como se puede apreciar, el reparto se hacía de forma exhaustiva y dada la indivisibilidad de determinados elementos del ajuar doméstico, se tenía que alcanzar finalmente un acuerdo que compensase a los hermanos entre sí. Así, por ejemplo, Apiyatum recibía en resumen lo siguiente:

> *"1 sar y medio de casa construida (en lo relativo a 10 gin de casa construida, Apiyatum ha compensado a Lugatum con 1 siclo 20 granos de plata)...; 1 iku y medio, campo superior,...; 1 iku de campo "ganda"..., 1 vaca..., 8 ovejas, un cuarto de la prebenda de la Gran Puerta, 1 carro viejo (ha compensado a Lugatum por el carro con un siclo de plata)...".*

Así pues, en líneas generales se llegaba a acuerdos compensatorios donde unos hermanos, para conservar habitaciones como partes indivisas, por ejemplo, entregaban diversas cantidades de plata a otro. Se observa también el reparto efectuado de una prebenda de la Gran Puerta, cargo que suponía recibir determinadas raciones periódicas. Por tanto, había acuerdos y compensaciones que podían afectar a los repartos inicialmente más igualitarios. Sin embargo, en muchas ocasiones éstos tenían que realizarse fundamentalmente sobre los animales (vacas, ovejas, bueyes, se mencionan en el caso anterior) y las tierras. En el caso visto líneas arriba también la tierra merecía compensaciones según su calidad. No era igual un campo yermo que uno superior y otro de distinta productividad. Sin embargo, el que efectuaba los repartos debía saber dividir en partes iguales los campos, particularmente si eran de la misma calidad en todas sus partes. Ello conducía a un ejercicio matemático del que queda diversa constancia en forma de problemas que serán examinados en lo que se refiere a las figuras fundamentales en que podía dividirse una parcela: el trapecio y el triángulo.

División de campos triangulares

El ejemplo más sencillo de reparto proporcional de un campo triangular corresponde a una tablilla citada por Neugebauer y Sachs (1986).

En ella se describe un campo triangular de longitud L = 6.30 y área A = 11.22.30 que ha de dividirse entre seis hermanos por líneas paralelas a la base del campo triangular y equidistantes. Se pregunta por la diferencia entre los lotes de cada hermano.

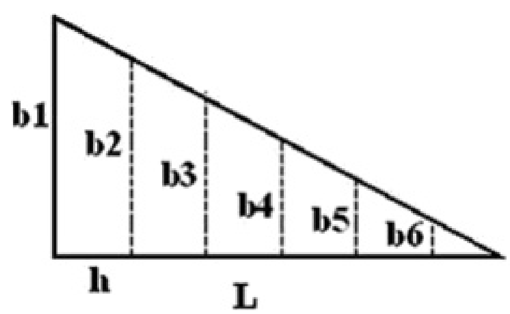

Figura 55

A partir de tales indicaciones se puede hacer la hipótesis de que el campo corresponda a un triángulo rectángulo que permitiría, con tales datos, llegar a la solución. En efecto, conociendo el área y el cateto más largo del campo (figura 55) se puede deducir la longitud de la base:

$$A = \frac{1}{2} b_1 \times L$$

$$b_1 = 2 A / L = 3.30$$

A continuación se calcula la base de cada parte sin más que dividir en seis partes la longitud L dada:

$$h = 6.30 / 6 = 1.05$$

Se forman así una serie de trapecios de los que se conoce la altura ($h = 1.05$) y para los que hay que hallar las distintas bases b_i y b_{i+1} con $i = 1,..,5$ junto a un triángulo final. Como luego se confirmará, los escribas mesopotámicos de esta época eran conocedores de las relaciones de semejanza entre triángulos y sus características, en particular del hecho de que un triángulo rectángulo es semejante al obtenido trazando una paralela a la base. Aplicándolo al campo triangular se puede obtener b_6 con facilidad:

$$b_1 / L = b_6 / h$$

$$b_6 = h\, b_1 / L = 1.05 \times 3.30 / 6.30 = 35$$

que permite deducir con facilidad la longitud de todas las bases b_i considerando, además, que el trazado de paralelas a la altura del triángulo por los puntos de corte de las divisiones con la hipotenusa resultan en triángulos iguales al que tiene por base b_6:

$$b_1 = 3.30$$
$$b_2 = 3.30 - 35 = 2.55$$
$$b_3 = 2.55 - 35 = 2.20$$
$$b_4 = 2.20 - 35 = 1.45$$
$$b_5 = 1.45 - 35 = 1.10$$
$$b_6 = 1.10 - 35 = 35$$

No se ha conservado el cálculo posterior de los trapecios rectángulos que habría de hacerse y que, en sus primeros pasos, sería el siguiente:

$$A_1 = ½ (b_1 + b_2)\, h = ½ (3.30 + 2.55) \times 1.05 = ½\ 6.25 \times 1.05=$$
$$= 3.12;\ 30 \times 1.05 = 3.28.32;\ 30$$

$$A_2 = ½ (b_2 + b_3) h = ½ (2.55 + 2.20) \times 1.05 = ½\ 5.15 \times 1.05=$$
$$= 2.37; 30 \times 1.05 = 2.50.37; 30$$

Otro caso de división de un triángulo resulta relativamente sencillo y muestra las dificultades de interpretación geométrica que se plantean en no pocas ocasiones ante determinados problemas. En este caso se trata de una tablilla que contiene una figura triangular que muestra algunas discrepancias respecto a los datos numéricos que contiene (figura 56). Su texto afirma lo siguiente (Neugebauer y Sachs 1986, p. 53):

"Un triángulo. 1.40 es cada una de sus longitudes, 2.20 el ancho. ¿Cuál es el área?"

Para continuar con el procedimiento de solución:

> *"A partir de 2.20, el ancho que... restar 20...ancho del triángulo... y entonces la mitad de 2.0 que dejas y (el resultado es) 1.0. 1.0 es el ancho de un triángulo, 1.0 el ancho del segundo triángulo, ¿cuál es la segunda longitud? Multiplicar 20, el "maksarum" por 4 y (el resultado es) 1.20; 1.20 es la segunda longitud. Y entonces la mitad de 1.0, el ancho del triángulo, y multiplicar (el resultado) 30 por 1.20, la (segunda) longitud; el (resultado) 40.0 es el área del (primer) triángulo. La mitad de 20, el ancho del triángulo, multiplicar (el resultado) 10, por 1.20, el (resultado) 13.20 es el área del (segundo) triángulo"*

El texto sólo menciona (figura 57) los valores d = 1.40 y 2a + b = 2.20 no presentando ningún valor de b que, sin embargo, es utilizado en la primera operación que se propone para encontrar el valor de a:

$$a = ½ (B - b) = ½ (2.20 - 20) = 1.0$$

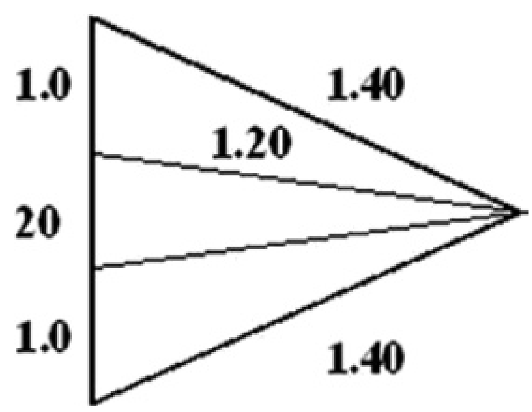

Figura 56

Tras la mención del "*maksarum*", que se aclarará posteriormente, para obtener c = 1.20, el escriba empieza a calcular áreas de triángulos mediante la fórmula adecuada.

Sin embargo, aquí ya hay discrepancia con la figura que da la tablilla dado que el área de los triángulos laterales se calcula multiplicando la mitad de la base a (1.0) por la altura c (1.20) resultando en un área de 40.0. Ello está en desacuerdo con el triángulo tal como se presenta en la figura 56 por lo que cabe la posibilidad de que la forma definitiva sea la de la figura 57 que el escriba dibuja de otro modo por la comodidad de trazo que supone.

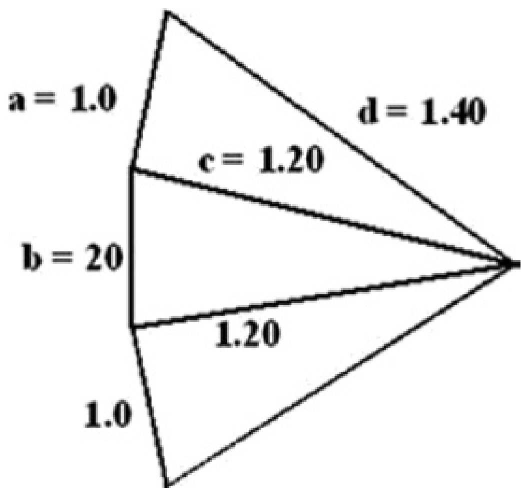

Figura 57

En contra de esta figura está el hecho de que, nuevamente, el área del triángulo central es calculada mediante el recurso de multiplicar la mitad de la base (20) por uno de los lados del triángulo (1.20) que no coincide con la altura. Los datos, pues, son contradictorios y muestran el carácter aproximativo del ejercicio al objeto de facilitar los mecanismos de cálculo.

En todo caso, sí conviene mencionar el "*maksarum*" que puede haber sido un elemento de utilización en otros problemas preparados para su uso escolar.

Se observa, en lo que concierne a cualquiera de los dos triángulos laterales (probablemente rectángulos), que sus lados son proporcionales a la tripleta pitagórica básica:

$$a = 3 \times 20 = 1.0$$
$$c = 4 \times 20 = 1.20$$
$$d = 5 \times 20 = 1.40$$

de forma que el término "*maksarum*" puede referirse al factor común por el que hay que multiplicar los elementos de la tripleta pitagórica (3, 4, 5) para obtener, respectivamente, los lados del triángulo rectángulo a, c y d, refiriéndose en el texto de la tablilla, concretamente, al cálculo de la longitud c.

El último ejemplo que se mostrará corresponde a una tablilla encontrada en Tell Harmal y datada, aproximadamente, en el 2000 a.C (figura 58). En ella se puede

apreciar el conocimiento implícito del escriba de que un triángulo rectángulo es semejante al obtenido trazando un segmento perpendicular desde el vértice del ángulo recto hasta la hipotenusa (Jones, 1994).
Se dan los lados de un triángulo ABC

AB = 45,
AC = 1.0,
BC = 1.15

y las áreas de los sucesivos triángulos que se obtienen por el procedimiento señalado (figura 59):

Área (ABD) = 8.06
Área (ADE) = 5.11; 02.24
Área (EDF) = 3.19; 03.56.36
Área (EFC) = 5.53; 53.39.50.20

Figura 58

Lo primero que es constatable es que, efectivamente, el triángulo es rectángulo aunque no se señale como tal en el texto de la tablilla:

$$1.00^2 + 45^2 = 1.00.00 + 33.45 = 1.33.45 = 1.15^2$$

El problema consiste en hallar la longitud de los lados BD, DF, AE y AD. Evidentemente, el problema es poco realista por cuanto, en la división de un campo característica del reparto de una herencia, se conocen las dimensiones del campo, como en este caso, pero no las áreas tal como quedan finalmente divididas. En realidad, estas áreas serían el objetivo final del procedimiento de reparto.

Así pues, este problema supone una especie de vuelta atrás. En el problema original se trazarían las perpendiculares permitiendo medir los lados que son las bases de los triángulos en que queda dividido el original. A partir de ellos se pueden calcular las áreas correspondientes como solución final. En la tablilla presente se procede al contrario. Se parte de las áreas para determinar los segmentos en que queda dividido el lado original del triángulo. Es, por tanto, una especie de comprobación y de práctica para escolares sobre las relaciones características de los triángulos rectángulos.

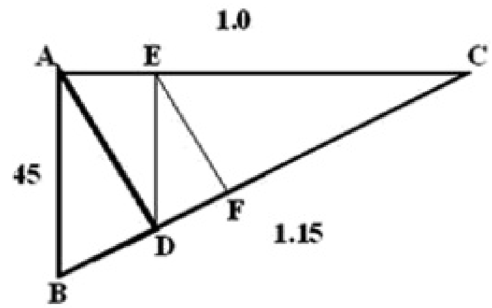

Figura 59

Así, la tablilla propone el siguiente camino para alcanzar la primera longitud pedida:

1. Tomar el inverso de 1.0 y multiplicarlo por 45, resultado 0; 45.
2. Multiplicar 0; 45 por 2, saldrá 1; 30.
3. Multiplicar 1; 30 por 8.06, resultado 12.09.
4. Hallar la raíz de 12.09, saldrá 27, la longitud del lado BD.

Conociendo BD ya se puede calcular AD al corresponder a un triángulo rectángulo, aplicándose de nuevo el procedimiento para hallar la longitud de AE y haciéndolo recurrente en la búsqueda de DF. Ahora bien, los pasos realizados por el escriba no son inmediatamente interpretables, ya que suponen lo siguiente:

1. AB x 1/AC
2. 2 x AB/AC
3. 2 x AB/AC x (Área ABD)
4. Raíz cuadrada de la cantidad anterior.

Del mismo modo que el escriba, se puede proceder invirtiendo los pasos dados y partiendo del resultado final:

$$BD = \sqrt{2 \frac{1}{AC} AB (Area\ ABD)}$$

Elevando al cuadrado

$$BD^2 = 2 \frac{AB}{AC}\left(\frac{AB \times BD}{2}\right) = \frac{AB}{AC} AD \times BD$$

Dividiendo por la longitud BD se obtiene:

$$BD = AB/AC \times AD$$

$$BD / AD = AB / AC$$

que indica que el resultado propuesto por el escriba proviene de considerar la relación de semejanza entre ambos triángulos rectángulos, el original ABC y el obtenido a partir de él, ABD.

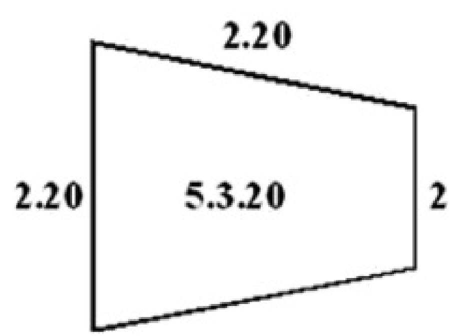

Figura 60

Área de trapecios

Los trapezoides con todos sus lados desiguales, tal como debían resultar en la práctica de la división de los campos, eran habitualmente reducidos, en el ámbito escolar, a trapecios isósceles o rectángulos, de más fácil tratamiento.

Con ellos, la conocida fórmula aproximativa para el área del trapezoide, consistente en multiplicar la semisuma de los lados opuestos, se reducía a la semisuma de las bases distintas multiplicada por la altura o uno de los lados iguales del trapecio.

Así, se pueden encontrar diversas tablillas que muestran lo dicho (Neugebauer y Sachs, 1986). La figura 60 presenta las siguientes medidas: Dos bases de 2.20 y 2, un lado de 2.20 que en la figura parece igual al contrario, y un área de 5.03.20.
Este último dato indica que la operación efectuada para hallar el área ha sido:

$$2.20 \times (2.20 + 2.00)/2 = 2.20 \times 2.10 = 5.03.20$$

En otro caso, este cálculo del área del trapecio isósceles es más detallado. La tablilla dice lo siguiente (Aaboe 1998, p. 28):

> *"Un trapezoide. 30 es la longitud, 30 la segunda longitud, 50 el ancho superior, 14 el ancho inferior. 30 veces 30 son 15.0. Resta 14 de 50 y el resto es 36. La mitad es 18. 18 veces 18 es 5.24. Resta 5.24 de 15.0 y el resto es 9.36. ¿Qué debes multiplicar por sí mismo para que el resultado sea 9.36? 24 veces 24 es 9.36. 24 es la línea divisoria. Añade 50 y 14, los anchos, y (el resultado es) 1.4. La mitad es 32. Multiplica 24, la línea divisoria, por 32, y (el resultado es) 12.48..."*

De los datos ofrecidos por el escriba se deduce que (figura 61):

$$L = 30$$
$$B_1 = 50$$
$$B_2 = 14$$

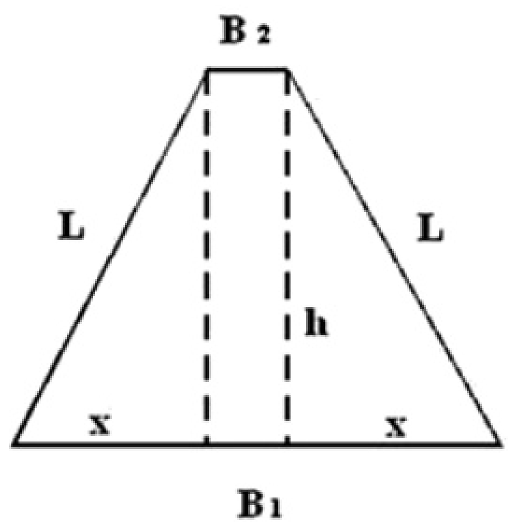

Figura 61

que permite interpretar el procedimiento del siguiente modo:

1. 30 veces 30 son 15.00. Se halla L^2
2. Restar 14 de 50, el resto es 36. $B_1 - B_2$
3. La mitad de esto es 18. $x = ½ (B_1 - B_2)$
4. 18 veces 18 son 5.24. $X^2 = [½ (B_1 - B_2)]^2$
5. Restar 5.24 de 15.00, el resto es 9.36. $L^2 - [½ (B_1 - B_2)]^2 = L^2 - x^2$

6. ¿Qué debes multiplicar por sí mismo para que el resultado sea 9.36? 24, la línea divisoria. Se halla la raíz cuadrada de L^2 - x^2 para obtener h, la altura.
7. Añadir 50 y 14, los anchos y el resultado es 1.04. $B_1 + B_2$
8. La mitad de esto es 32. ½ $(B_1 + B_2)$
9. Multiplicar 24 por 32 y el resultado es 12.48. Área = ½ $(B_1 + B_2)$ h

Como se puede apreciar, por tanto, eran capaces de calcular con exactitud el área de un trapecio isósceles. Sin embargo, tanto en su vertiente escolar como en la práctica de agrimensura, debían ser frecuentes las aproximaciones que consideraran como altura al lado oblicuo. A partir de estos elementos y al objeto de llegar a repartos de campos, alcanzaban resultados notablemente complejos que se estudiarán a continuación.

División de otros campos

Los dos ejemplos mostrados en este apartado se presentan en la conocida obra de Neugebauer y Sachs (1986) y utilizan el área del trapecio al realizar sus divisiones. El primero trata de la realizada sobre un triángulo rectángulo mediante un segmento paralelo a la base en otro triángulo y un trapecio. De nuevo resulta ser un ejercicio escolar donde se proporciona el área de dicho trapecio y se pide la longitud de la base y el segmento divisorio (figura 62).

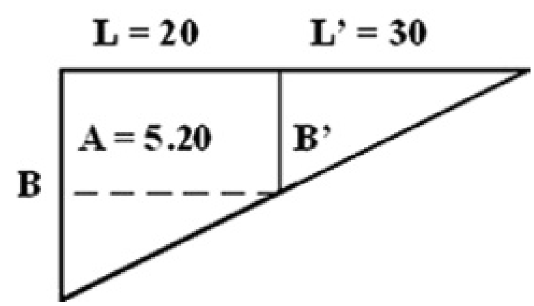

Figura 62

En efecto, los datos son los de una altura de 50 que se divide mediante un segmento paralelo a la base en dos partes, L y L', de longitudes respectivamente 20 y 30. El área del trapecio resultante es de 5.20 y se trata de hallar los lados paralelos del trapecio, es decir, la base B del triángulo mayor y la base B" del menor. Las instrucciones dadas por el escriba se irán exponiendo junto a la interpretación más actual.

> *"Realiza (las operaciones). Toma el recíproco de 20, será 0; . Multiplica 0; 03 por 5.20 y (el resultado es) 16"* (p. 48).

El área del trapecio viene a ser A = ½ (B + B’) L = 5.20 de donde

$$A / L = 5.20 / 20 = 5.20 \times 0; 03 = 16 = ½ (B + B')$$

El párrafo siguiente del escriba sólo se puede entender a partir de la aplicación de las propiedades de semejanza de triángulos,

$$B / L + L' = B' / L' = B - B' / L$$

obteniéndose las dos igualdades:

$$B = L + L'/L (B - B')$$

$$B' = L'/L (B - B')$$

Sumando:

$$B + B' = 2L' + L/L (B - B') ½ (B - B') = L/2 (2L' + L) (B + B')$$

así que, según la expresión del área del trapecio,

$$½ (B - B') = A/2L' + L$$

lo que ya permite interpretar el párrafo final,

> *“Para el ancho superior y... 30, la longitud, multiplica por 2, añade (el resultado) 1.0 y 20, la perpendicular superior (y el resultado es) 1.20. Toma el recíproco de 1.20. (Multiplica el resultado) 0; 0.45 por 5.20, el área, (y el resultado es 4). Añade (4 a) 16, resta de 16. (El ancho superior es) 20, (el inferior 12)”.*

$$2 L' = 2 \times 30 = 1.00$$

$$2\,L' + L = 1.00 + 20 = 1.20$$

$$1/2L' + L = 1/1.20 = 0;\ 00.45$$

Multiplicando este resultado por el área a continuación:

$$A/2L' + L = 0;\ 00.45 \times 5.20 = 4 = ½\,(B – B')$$

En resumen,

$$½\,(B + B') = 16$$

$$½\,(B – B') = 4$$

de donde, sumando, se tiene B = 20 y restando, B' = 12.

El segundo es algo más complejo en su resolución y se enuncia del siguiente modo (Neugebauer y Sachs, 1986, p. 50):

> *"Un trapezoide... Divide el área (en dos): 42.11; 15 es el área de la parte inferior;*
> *14.3.45 el área de la parte superior; un quinto de (la longitud de) la parte inferior es (la longitud de) la parte superior; (52; 30 es la línea divisoria). ¿Cuáles son (la longitud superior y la inferior?".*

El problema plantea el caso de un trapecio que, por comodidad, se considerará rectángulo (figura 63), de tal manera que una línea paralela a las bases deja la altura dividida en dos segmentos, L_1 y L_2, de modo que su relación es como 1 a 5. Se conoce la longitud del segmento divisorio y las áreas en que queda dividido el trapecio, pero se desea determinar las longitudes L_1 y L_2. Entiéndase que las referencias a la parte superior e inferior se refieren a las

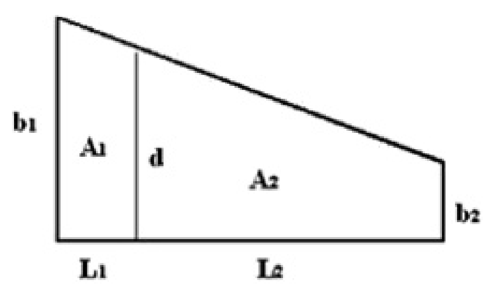

Figura 63

correspondientes áreas o longitudes de las bases superior (b_1) e inferior (b_2), respectivamente. Para ello,

> *"Sea 5 el del ancho inferior y sea 1 el del ancho superior. Añade 14.3; 45 y 42.11; 15, tendrás 56.15. Añade 5 y 1, (el resultado) será 6; toma el recíproco de 6, será 0; 10; multiplica (0; 10) por 56.15, y multiplica (lo resultante) 9.22; 30 por dos; (el resultado es) 18.45; ten 18.45 en tu cabeza".*

En primer lugar, se determina el área total del trapecio como suma de las dos parciales:

$$A = A_1 + A_2 = 14.03;\ 45 + 42.11;\ 15 = 56.15$$

La relación entre los dos segmentos buscados, L_1 y L_2, es como 1 a 5, por lo que se puede conjeturar que

$$L_1 = 1 / k \quad L_2 = 5 / k$$

de donde:

$$L_1 + L_2 = 6 / k$$

Resulta que el área global del trapecio es:

$$A = ½ (b_1 + b_2) (L_1 + L_2)$$

$$2 A / (L_1 + L_2) = b_1 + b_2$$

$$2 A / 6 = 1/k (b_1 + b_2)$$

que es la operación efectuada por el escriba,

$$2 \times 56.15 / 6 = 2 \times 9.22;\ 30 = 18.45 = 1/k (b_1 + b_2)$$

"Toma el recíproco de 1 del ancho superior, y (el resultado es) 1; multiplica 1 por 14.3; 45 y tendrás 14.3; 45; multiplica por dos (y) será 28.7; 30".

Se realiza por tanto una operación similar con el primer trapecio, el que tiene por área A_1:

$$A_1 = ½ (b_1 + d) L_1$$

$$2 A_1 = (b_1 + d) L_1$$

$$2 A_1 / L_1 = (b_1 + d)$$

al ser $L_1 = 1/k$:

$$2 A_1 = 2 \times 14.03; 45 = 28.07; 30 = 1/k (b_1 + d)$$

"Restar 18.45 de 28.7.30, y (el resultante) 9.22; 30 tenlo en tu cabeza".
Restando [1] de [2] se obtiene:

$$1/k (b_1 + d) - 1/k (b_1 + b_2) = 28.07; 30 - 18.45 = 1/k (d - b_2) = 9.22; 30$$

De un modo similar al realizado para el primer
trapecio se realizan las mismas operaciones para el segundo, el de área A_2, obteniéndose:

$$2 A_2 / L_2 = (b_2 + d)$$

siendo $L_2 = 5/k$

$$2 A_2 / 5 = 1/k (b_2 + d)$$

$$2 \times 42.11;\ 15 / 5 = 16.52;\ 30 = 1/k\ (b_2 + d)$$

A partir de aquí el escriba halla la mitad de los valores [3] y [4] y los suma:

$$1/2k\ (d - b_2) = 9.22;\ 30 \times 0;\ 30 = 4.41;\ 15$$

$$1/2k\ (b_2 + d) = 16.52;\ 30 \times 0;\ 30 = 8.26;\ 15$$

$$1/2k\ (b_2 + d) + 1/2k\ (d - b_2) = 8.26;\ 15 + 4.41;\ 15 = 13.07;\ 30$$

es decir:

$$d / k = 13.07;\ 30$$

"¿Qué debes poner a 13.7; 30 para te dé 52; 30, su línea divisoria? 0; 4. El recíproco de 0; 4 será 15".

De esta forma se obtiene el valor de k:

$$k = 52;\ 30 / 13.07.30 = 0;\ 4$$

$$1/k = 1/0;\ 4 = 15$$

> *"Debes multiplicar 15 por 1, que será el ancho superior, y (lo resultante) 15 es la longitud de la parte superior. Debes multiplicar 15 por 5, que será el ancho inferior, será 1.15, la longitud de la parte inferior".*

Así se obtienen los valores pedidos:

$$L_1 = 1/k = 1 \times 15 = 15$$

$$L_2 = 5/k = 5 \times 15 = 1.15$$

Capítulo 9
Ecuaciones de primer grado

Ecuaciones de primer grado

Debían ser frecuentes las situaciones que surgiesen en la administración y el comercio susceptibles de ser tratadas numéricamente como una ecuación de primer grado. A fin de cuentas, las multiplicaciones eran frecuentes y bastaba conocer el resultado de una de ellas ignorando uno de los factores para que se planteara un caso elemental de tal tipo de ecuaciones. Así, por ejemplo, considérese un reparto de herencias de un campo rectangular de dimensiones 30 nindas de longitud y 10 nindas de anchura. Se desea repartir el campo entre dos hermanos mediante una separación paralela a la longitud de manera que queden dos campos rectangulares y uno de los campos sea la mitad que el otro (figura 64).

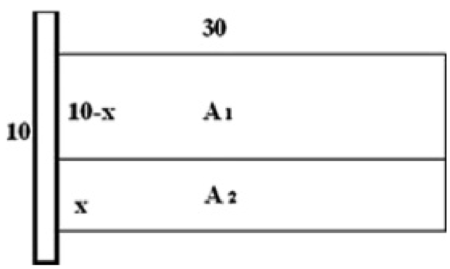

Figura 64

En este caso el procedimiento es sencillo, si bien puede servir de estándar para casos más complejos en que las figuras no sean rectangulares o haya otro tipo de variaciones.

Si llamamos x a la anchura del campo más pequeño que se crea tras la división, la anchura del otro resultante, el mayor, será 10-x, de manera que las dos áreas vendrán dadas por:

$$A_1 = 30\ (10 - x) = 5.00 - 30\ x$$

$$A_2 = 30\ x$$

y como el primer rectángulo tiene que ser de área doble que el segundo, entonces se verificará la igualdad:

$$1.00\ x = 5.00 - 30\ x$$

que da paso a:

$$1.00\ x + 30\ x = 5.00$$

$$1.30\ x = 5.00$$

El recíproco de 1.30 es 0; 00.40 de manera que el resultado se obtiene:

$$x = 0;\ 00.40 \times 5.00 = 3;\ 20 \text{ nindas}$$

El comerciante y mercader tendrían que hacer cálculos de este tipo relacionados con la ganancia esperable.

Así, en caso de comprar H unidades de una determinada mercancía, con un precio c de compra por unidad y un precio v de venta por unidad, se generaría una ganancia G de: $G = H (v - c)$ lo cual, según cuál sea la incógnita, da lugar a todo tipo de ecuaciones de primer grado:

1. Si se desea una ganancia de 15 siclos de plata, por ejemplo, para unos precios de compra y venta por unidad, respectivamente, de 3 y 5 siclos, ¿cuántas unidades habrán de adquirirse?

$$15 = (5 - 3)\ H = 2\ H$$

2. Si se desea la misma ganancia y se han comprado 8 unidades a 3 siclos de plata cada una, ¿cuál debe ser el precio de venta para garantizar esa ganancia?

$$15 = 8\ (v - 3)$$

Sin embargo, no todas las ecuaciones resultantes son iguales ni de la misma dificultad. Evidentemente, las más sencillas, como la primera planteada respecto a la ganancia del mercader, $a\ x = c$ son de inmediata resolución con una división. Pero el segundo caso mostrado, del tipo

$$a\ x \pm b = c$$

obliga a un paso previo que conduzca a transformarla en una del primer tipo. Ello no debía ser difícil considerando que la resolución de estas ecuaciones debía alcanzarse "volviendo hacia atrás" los pasos de la ecuación, tal como se afrontan inicialmente las manipulaciones algebraicas cuando se entienden como una aritmética generalizada. Así,

$$15 = 8 (v - 3) = 8 v - 24$$

Si a 8 v se le ha quitado 24 para dar 15, entonces 8 v será igual al resultado de añadirle 24 a 15,

$$15 + 24 = 8 v$$

$$39 = 8 v$$

que ya es del primer tipo.

Otra variación más compleja reside en disponer de la incógnita en ambos miembros de la igualdad, tal como sucedía en el caso inicial del campo: 1.00 x = 5.00 - 30 x

Un ejemplo de ello se encuentra entre las tablillas mesopotámicas (Glassner 1995, p. 571):

"Para 2/3 de mis 2/3 he añadido un ban, y la cebada está en la mitad"

Considerando x la cantidad inicial de cebada, entonces esta situación puede plantearse actualmente como

$$2/3\ 2/3\ x + 1 = ½\ x$$

$$4/9\ x + 1 = ½\ x$$

Esto requiere otro tipo de razonamiento: Si a 4/9 (o bien 2/3 de 2/3) de la cantidad inicial hay que añadirle un ban para alcanzar la mitad de dicha cantidad inicial, entonces ¿qué parte de la cantidad inicial habré cubierto con un ban?

Pues lo que le falta a 4/9 de la misma para alcanzar su mitad.
Simbólicamente,

$$\tfrac{1}{2} x - 4/9 x = 1$$

o bien

$$\tfrac{1}{2} x - (2/3 \text{ de } 2/3) x = 1$$

$$0; 30 x - (0; 40 \times 0; 40) x = 1$$

$$0; 30 x - 0; 26.40 x = 1$$

$$0; 03.20 x = 1$$

$$x = 1 \times 18 = 18 \text{ ban}$$

Método de falsa posición

Hay problemas que parecen poder reducirse a los de este último tipo, con la presencia de la incógnita en ambos miembros de la igualdad inicial, pero que presentan una particularidad que hace que el escriba los diferencie. Tal es el caso de:

> *"He comido 2/3 de 1/3 de mi ración. Me queda 7. ¿Cuál es mi ración?"* (Glassner 1995, p. 571).

Expresable como: $x - 2/3\ 1/3\ x = 7$

Evidentemente, esto no son casos reales sino ejercicios escolares con los que los estudiantes para escribas aprendían a manipular otro tipo de situaciones que podrían presentarse, quizá incluso de manera más compleja, en la administración y el comercio. Así, por ejemplo, si el precio de compra de una mercancía fuera de x siclos y se tiene en cuenta que la caravana del mercader tiene que pagar una tasa de 1/7 sobre el precio en origen de lo adquirido, finalmente se habrán de pagar 50 siclos, ¿cuántas unidades se habrán adquirido? Ello lleva a plantearse,

$$x + 1/7\ x = 50$$

de un modo similar al abordado antes.

¿Cuál es la forma de resolución para estas ecuaciones de primer grado? Tal parece que debería haber sido de un modo similar al comentado en el último ejemplo del apartado anterior, pero lo cierto es que la mentalidad del escriba mesopotámico no le permitía operar sobre la incógnita como se hizo entonces. La solución venía dada probando números que se acercaran a la respuesta en lo que se ha denominado "método de falsa posición".

Lo primero que hay que observar sobre este método es que la prueba no se efectuaba al azar sino escogiendo el número que se postulaba como posible valor de la x de manera que el resultado de operar sobre la incógnita diera una cantidad entera. Así, en el ejemplo mostrado de $x - 2/3\ 1/3\ x = 7$ se tomaría como valor $x = 9$ que garantizaría un resultado entero al hallar los 2/3 de 1/3 del mismo. Así, resultaría para $x = 9$

$$9 - 2/3\ 1/3\ 9 = 9 - 2 = 7$$

lo que supone encontrar inmediatamente la solución. Sin embargo, como es de suponer, este método de falsa posición no siempre puede ser acertado sino que el número postulado constituye una primera aproximación que debe corregirse posteriormente. El proceso se puede observar con mayor detalle en una tablilla que contiene el siguiente problema (Melville 2002, p. 5):

> *"Tengo una piedra, no su peso. Un séptimo es añadido. Lo peso, una mina. ¿Cuál es el peso original de la piedra? 52 ½ gin".*

En este caso surge una ecuación simple:

$$x + 1/7\ x = 1.00 \text{ gin.}$$

El valor postulado será el de

Para x = 7 gin7 + 1/7 7 = 8

El resultado no coincide con el que debe obtenerse (1.00). Ahora bien, el escriba supone entonces que existe una relación proporcional entre el número postulado como valor de la incógnita y la solución obtenida. Probablemente, a partir de ciertos tanteos sistemáticos es posible observar esta relación proporcional,

Para x = 14 gin: 14 + 1/7 14 = 16
Para x = 21 gin: 21 + 1/7 21 = 24

Es decir, que si se multiplica la solución postulada por un determinado número, el resultado final se multiplica por el mismo número. De esta forma, solamente habrá que ver la relación existente entre la primera cantidad obtenida (8 gin) y la deseada (1.00 gin) para saber por qué número habrá que multiplicar el valor postulado de la incógnita (7 gin) para llegar a la verdadera solución del problema. En términos proporcionales, se considera

x / 7 = 1.00 / 8

Primero, pues, hay que multiplicar 1.00 por el recíproco de 8:

1.00 x 0; 07.30 = 7; 30

de manera que el valor final de la incógnita vendrá dado por:

7 x 7; 30 = 52; 30 gin = 52 ½ gin

Cambio de variable

La tablilla que acabamos de mencionar debía contener en su origen 22 problemas de este tipo, de los que quedan solamente once: seis completos y cinco incompletos.

La forma del comienzo, en todos ellos, es la misma: *"Tengo una piedra, no su peso".* A ello le sigue una serie de manipulaciones matemáticas de dicho peso para resultar finalmente en un peso final de una mina. La complejidad de las transformaciones que tienen lugar sobre el peso desconocido de la piedra, así como lo ficticio del planteamiento y el resultado final unitario (1 mina = 1.00 gin) muestran que esta colección de problemas no responden a una situación real, sino que se toman como ejercicios para que el estudiante aprenda las manipulaciones que tienen lugar y cómo aplicar el método entonces disponible, el de falsa posición, a situaciones crecientemente complicadas.

Por otra parte, la referencia al peso de la piedra debe tomarse como una simple denominación de la incógnita cuando, en aquel tiempo, no se disponía de un nombre propio para ella. Hay que recordar que en la época renacentista el álgebra italiana, que alcanzó gran renombre e importancia, fue denominada el "arte de la cosa" por cuanto así (cosa) se denominaba la incógnita. El escriba mesopotámico toma como denominación de la incógnita un elemento de presencia cotidiana, como es la piedra. Por otro lado, es obvio que el escriba desconoce todo tipo de simbolismo e incluso de abreviaturas tanto en el enunciado del problema como en su solución que, en esta tablilla, no se incluye. Parece pues una relación de ejercicios para la práctica del estudiante o incluso para que el profesor pudiera verbalmente plantearlos.

Vamos entonces a analizar distintos problemas de esta tablilla en orden creciente de dificultad después de haber visto el primero en el apartado anterior.

Problema 1

> *"Tengo una piedra, no su peso. Un séptimo es añadido. Un onceavo es añadido. Lo peso, una mina. ¿Cuál es el peso original de la piedra? 2/3 mina, 8 gin, 22 ½ se"* (Melville 2002, p. 2).

La secuencia de operaciones de adición, así como el propio resultado, indican que, en términos actuales, se está planteando la siguiente ecuación:

$$(x + 1/7\ x) + 1/11\ (x + 1/7\ x) = 1.00$$

pero no puede considerarse que éste sea el planteamiento del escriba ni, sobre todo, que adopte la forma actual de manipulación algebraica que permita reducir a una forma más sencilla el problema. Lo que hará será disponer de un recurso cuya presencia se ha podido constatar en otros problemas, que es el cambio de variable. Así, tomando como una nueva variable todo lo encerrado entre paréntesis:

$$x + 1/7\ x = v$$

se trata de resolver:

$$v + 1/11\ v = 1.00$$

Esta última se abordará del modo que acabamos de ver, mediante la falsa posición:

Para $v = 11 \quad 11 + 1/11\ 11 = 12$

Como el recíproco de 12 es 0; 05 el factor por el que habrá que multiplicar la cantidad postulada será:

$$1.00 \times 0;\ 05 = 5$$

de modo que

$$v = 11 \times 5 = 55 \text{ gin}$$

así que ahora la ecuación nueva que ha de resolverse por el mismo método es:

$$x + 1/7\ x = 55$$

Para $x = 7$

$$7 + 1/7\ 7 = 8$$

Como el recíproco de 8 es 0; 07.30

55 x 0; 07.30 = 6; 52.30

así que

x = 7 x 6; 52.30 = 48; 07.30

equivalentes a:

x = 40 + 8 + 0; 07.30 = 2/3 mina 8 gin 22 ½ se

En el ejemplo siguiente se considera un cambio no por incremento de la incógnita sino por su disminución repetida. Es interesante observar que las fracciones que permiten manipular esta incógnita tienen un denominador impar y, en general, números cuyos recíprocos no tienen una expresión finita en sexagesimal (1/7, 1/11, 1/13, etc.). Sin embargo, al aplicar el método de falsa posición siempre se añade la unidad y el recíproco que hay que calcular finalmente sí corresponde a un número regular. Por ejemplo, 1/7 obliga a hallar el recíproco de 8, 1/11 conduce al recíproco de 12. Habría un problema si el incremento de 1/13 de la incógnita fuera aditivo, por cuanto el número resultante, 14, tampoco tiene un recíproco con expresión finita. Es por ello que la intervención de 1/13 de la incógnita corresponde siempre a un proceso de resta, con lo que resulta que hay que hallar el recíproco de un número regular, 12.

Problema 2

> *"Tengo una piedra, no su peso". Se resta un séptimo. Se resta un treceavo. Lo peso, una mina. ¿Cuál es el peso original de la piedra? 1 mina, 15 5/6 gin"*. (Op. cit., p. 6).

Las dos ecuaciones planteadas, en este caso, serían

$$x - 1/7\ x = v$$

$$v - 1/13\ v = 1.00 \text{ gin}$$

Para v = 13

$$13 - 1/13\ 13 = 12$$

y como su recíproco es 0; 05:

$$1.00 \times 0;\ 05 = 5$$

que es el número por el que hay que multiplicar la cantidad supuesta para llegar a la solución de la segunda ecuación:

$$13 \times 5 = 1.05$$

de forma que la primera ecuación se transforma en:

$$x - 1/7\ x = 1.05$$

y para x = 7

$$7 - 1/7\ 7 = 6$$

que tiene por recíproco 0; 10 de forma que

$$1.05 \times 0;\ 10 = 10;\ 50$$

que da la solución:

$$7 \times 10;\ 50 = 1.15;\ 50 \text{ gin} = 1 \text{ mina } 15 \text{ gin } 5/6 \text{ gin}$$

Problema 3

El problema más complejo de la tablilla que parta de la consideración aislada de la incógnita, es el siguiente, al incluir hasta tres cambios consecutivos que pueden tratarse como otras tantas ecuaciones de primer grado:

> *"Tengo una piedra, no su peso. Se resta un séptimo. Se añade un onceavo. Se resta un treceavo. Lo peso, una mina. ¿Cuál es el peso original de la piedra? 1 mina, 9 ½ gin 2 ½ se"* (Op. cit., p. 6).

En este caso se deben plantear, como hemos dicho, tres ecuaciones consecutivas:

I. $x - 1/7\ x = w$

II. $w + 1/11\ w = v$

III. $v - 1/13\ v = 1.00$

que hay que ir resolviendo en sentido contrario, desde la III hasta la I. Comenzando con la III, el primer supuesto del método partiría de que para v = 13

$$13 - 1/13\ 13 = 12$$

así que el valor intermedio será

$$1.00 \times 0;\ 05 = 5$$

y así resulta

$$13 \times 5 = 1.05$$

con lo que se tiene

II) $w + 1/11\ w = 1.05$

Para w = 11

11 + 1/11 11 = 12

1.05 x 0; 05 = 5; 25

y la solución sería:

11 x 5; 25 = 59; 35

para dar lugar a la primera ecuación

I) x - 1/7 x = 59; 35

Para x = 7

7 - 1/7 7 = 6

y siendo su recíproco 0; 10

59; 35 x 0; 10 = 9; 55.50

para una solución final de:

7 x 9; 55.50 = 1.09;30.50 = 1 mina 9 gin ½ gin 2 ½ se

Los dos últimos casos incluyen otro tipo de tratamiento de la incógnita que ya no aparece considerada aisladamente sino repetida varias veces desde el principio.

Ello no altera en lo sustancial los métodos de cambio de variable, que descomponen la ecuación inicial en un conjunto de ecuaciones sencillas ligadas entre sí ni afecta tampoco al método de falsa posición utilizado para resolverlas.

Problema 4

"Tengo una piedra, no su peso. Lo peso 8 veces, añado 3 gin, un tercio de un treceavo lo multiplico por 21, lo añado y entonces lo peso, una mina. ¿Cuál es el (peso) original de la piedra? 4 ½ gin" (Fauvel y Gray 1987, p. 26).

Las dos ecuaciones, en este caso, son distintas de los ejemplos anteriores:

I) $8x + 3 = v$

II) $v + 1/3\ 1/13\ (21 v) = 1.00$

Para la solución de la segunda se toma el valor hipotético

$$v = 3 \times 13 = 39$$

que lleva a

$$39 + 21 = 1.00$$

lo que supone alcanzar directamente la solución de la ecuación, que coincide con el valor propuesto. Así, la primera ecuación se transforma en:

I) $8x + 3 = 39$

que puede resolverse de nuevo por el método de falsa posición o bien, invirtiendo el orden de las operaciones efectuadas sobre la incógnita. Si a la óctuple pesada de la piedra hay que añadirle 3 gin para obtener 39, entonces, la múltiple pesada es igual a 39 - 3 = 36.

$$8x = 36$$

y como el recíproco de 8 es 0; 07.30, la solución viene dada por

$$x = 36 \times 0;07.30 = 4;30 = 4 \text{ gin } \tfrac{1}{2} \text{ gin}$$

Problema 5

"Tengo una piedra, no su peso. La peso 6 veces, (añado) 2 gin (y) añado un tercio de un séptimo multiplicado por 24. Lo peso, una mina. ¿Cuál es el (peso) original de la piedra? 4 ½ gin" (Op. cit., p. 26).

En este caso, las ecuaciones planteadas son:

I) 6 x + 2 = v

II) v + 1/3 1/7 (24 v) = 1.00

que es la que se comienza por resolver. Se toma para v = 21

$$21 + 24 = 45$$

Como el recíproco de 45 es 0; 01.20, el factor necesario para el cálculo de la solución será:

$$1.00 \times 0;\ 01.20 = 1;\ 20$$

que conduce a:

$$21 \times 1;\ 20 = 28 \text{ gin}$$

y así la primera ecuación se transforma en:

I) 6 x + 2 = 28

que se puede resolver invirtiendo el orden de las operaciones efectuadas. Así, si a la séxtuple pesada de la piedra se le había añadido 2 gin para obtener 28, entonces es que dicha pesada repetida es

$$6\ x = 26\ \text{gin}$$

y como el recíproco de 6 es 0; 10,

$$x = 26 \times 0;\ 10 = 4;\ 20 = 4\ \text{gin}\ 1/3\ \text{gin}$$

Capítulo 10
Ecuación cuadrática

Presencia de las ecuaciones cuadráticas

Mientras que las ecuaciones de primer grado debían ser frecuentes en el trabajo de los escribas no sucede lo mismo con las de segundo grado, cuya presencia es más inusual. Naturalmente, toda situación donde una cantidad desconocida (la incógnita) se eleva al cuadrado ya puede suponer la presencia de una ecuación cuadrática y situaciones de este tipo no faltan. Así se comprobará en el siguiente capítulo en el que se presentarán problemas relacionados con la aplicación de tripletas pitagóricas. Así, Ghevergeese (1996) menciona el problema mesopotámico de hallar la longitud x y la anchura y de un campo rectangular cuando se conoce su área (x y) y la longitud de su diagonal (raíz cuadrada de $x^2 + y^2$).

Varios problemas del mismo tipo desembocan en los mismos cálculos cuadráticos. Glassner (1995) menciona el caso de un triángulo rectángulo del que se puede saber su área y la relación entre los catetos ignorando la longitud de uno de ellos (figura 65).

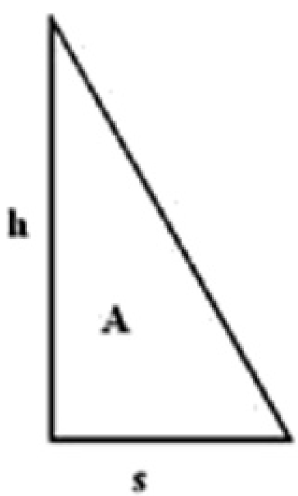

Figura 65

De esta forma, se conocería la relación s/h = r de manera que si el área viene dada por:

$$A = ½\ s\ h$$

será

$$A = ½\ h^2\ r$$

que, en caso de desconocer la altura, daría lugar a una ecuación cuadrática fácil de solucionar sin más que saber calcular raíces cuadradas. Otro tanto sucedía en el problema abordado en el capítulo 7 donde los límites circulares de una ciudad se expandían de forma circular transformándose en otros de un radio mayor.

Otra cuestión la constituyen aquellos problemas que dan lugar a ecuaciones más completas. Supóngase que se dispone de un campo cuadrado (figura 66) descompuesto en dos cuadrados distintos. Se conoce el área del cuadrado original [(x + y)2] y el lado de uno de los cuadrados que debe contener (por ejemplo, y). Se desea calcular el lado del otro cuadrado y el área de los campos en que queda dividido el original.

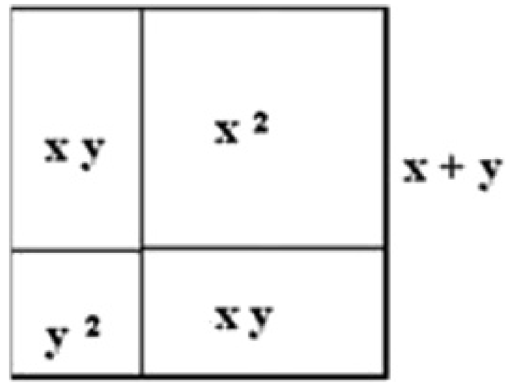

Figura 66

Así, dada la relación:

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2\,x\,y$$

el problema mencionado supondría plantear una ecuación de segundo grado con la incógnita x.

Cuestiones comerciales y de acumulación de intereses llevarían a problemas resolubles con la ecuación cuadrática. Tal es el caso del préstamo de una cantidad principal C que incluye con la obligación de devolver un porcentaje x % de dicha cantidad anualmente. La pregunta planteada será, ¿cuál debe ser el porcentaje de intereses para que la cantidad a devolver sea el doble de la original al cabo de dos años?

Se ha prestado una cantidad C.

Al cabo de un año, se habría de devolver C + C x

Al cabo de dos años, la devolución sería de (C + C x) + x (C + C x)

en caso de que el préstamo incluyese una actualización anual de la cantidad debida.

La condición impuesta es que:

$$(C + C\,x) + x\,(C + C\,x) = 2\,C$$

que da lugar a:

$$x^2 + 2\,C\,x = C$$

Sin embargo, los problemas resueltos a través de la cuadrática tienen un planteamiento nuevamente "escolarizado" y que persigue la práctica de las reglas de solución antes que las referencias a situaciones reales, más complejas que las presentadas a los estudiantes. Las hay de dos tipos:

Tipo 1: *La ecuación cuadrática surge a partir del planteamiento de un sistema de ecuaciones donde se presentan conocidos el producto de dos variables y su suma:*

$$x\,y = a$$

$$x + y = b$$

Tipo 2: *Dada la carencia de un lenguaje específico sobre estos términos, la presencia de una cantidad al cuadrado y la misma cantidad sin él origina el empleo de un lenguaje que transgrede el principio de homogeneidad dimensional. Así, se puede mencionar el sumar un cuadrado con su lado, como forma de expresar*

$$x^2 + x.$$

De este modo, el escriba consigue plantear directamente una ecuación cuadrática sin pasar por el planteamiento de un sistema de ecuaciones que lo origine.

Ambos tipos de situaciones problemáticas serán examinados a partir de ahora mostrándose, en primer lugar, el método de resolución característico de los escribas y cuál puede ser su origen.

Método de resolución

Consideremos el siguiente problema (Duvillié 1999, p. 108):

> *"Encontrar las dimensiones de un rectángulo conociendo la mitad de su perímetro, 6; 30, y su área, 7; 30".*

El planteamiento del problema es el que se ha comentado en el apartado anterior, dentro del tipo 1, de manera que

$$x + y = 6;\ 30$$

$$x\,y = 7;\ 30$$

Examinaremos la forma de resolución que propone el escriba y su equivalencia con los símbolos generales actualmente disponibles.

- Tomar la mitad del semiperímetro, 3; 15.

$$\tfrac{1}{2}(x + y)$$

- Hallar su cuadrado, 10; 33.45.

$$1/4\,(x + y)2$$

- Restar el área, 3; 03.45.

$$1/4\,(x + y)2 - x\,y = 1/4\,(x - y)^2$$

- Hallar la raíz cuadrada, 1; 45.

$$\tfrac{1}{2}(x - y)$$

- Añadir la mitad del semiperímetro, 1; 45 y 3; 15 son 5.
- La longitud es 5.

$$\tfrac{1}{2}(x - y) + \tfrac{1}{2}(x + y) = x$$

- Restar la raíz cuadrada de la mitad del semiperímetro,

1; 45 de 3; 15, 1; 30. La anchura es 1; 30.

$$\tfrac{1}{2}(x + y) + \tfrac{1}{2}(x - y) = y$$

Los pasos seguidos corresponden a la resolución actual de una ecuación cuadrática. El siguiente ejemplo mostrará las reglas de un modo evidente (Van der Waerden 1983, p. 60):

"He restado (el lado) del cuadrado a partir del área, y es 14.30".

A lo que se añade la resolución mediante la clásica relación de instrucciones algorítmicas:

"Toma 1, el coeficiente (del lado del cuadrado). Divide 1 en dos partes. 0; 30 x 0; 30 = 0; 15 que añades a 14.30.- 14.30; 15 tiene por raíz cuadrada 29; 30. Añades 29; 30 a 0; 30 que has multiplicado por sí mismo, y 30 es (el lado del) cuadrado" (Op. cit., p. 61).

En este caso, se ha planteado una ecuación cuadrática directamente, tal como se plantea en los problemas de tipo 2.

En términos actuales, se podría expresar como

$$x^2 - x = 14.30$$

que correspondería al tipo

$$x^2 + b\,x = c$$

Las reglas dadas por el escriba supondrían entonces seguir la siguiente secuencia en términos generales tomando b = 1 y c = 14.30:

$$b / 2$$

$$(b / 2)^2$$

$$c + (b / 2)^2$$

$$\sqrt{c + (b/2)^2}$$

$$x = {}^{b}/_{2} + \sqrt{c} + ({}^{b}/_{2})^2$$

que coincide plenamente con la expresión que resuelve esta ecuación cuadrática. Ahora bien, si el escriba mesopotámico era capaz de llegar a esta forma de resolución, la cuestión que se plantea inmediatamente es cómo la construyó.

Origen de la resolución

En la expresión general de la ecuación cuadrática

$$a'\,x^2 + b'\,x = c'$$

se puede dividir por el coeficiente de x2 al objeto de obtener la expresión canónica de dicha ecuación:

$$x^2 + b\,x = c \quad \text{donde } b = b'/a' \text{ y } c = c'/a'$$

Pues bien, la forma intuitiva más sencilla de obtener el valor de x consiste, algebraicamente hablando, en completar el cuadrado en el primer miembro al añadirle $(b/2)^2$

$$x^2 + b\,x + (b/2)^2 = (b/2)^2 + c$$

$$(x + b/2)^2 = (b/2)^2 + c$$

de donde:

$$x + {}^{b}/_{2} = \sqrt{}\,({}^{b}/_{2})^2 + c$$

$$x = -\,{}^{b}/_{2} + \sqrt{}\,({}^{b}/_{2}) + c$$

Para la ecuación $x^2 - b\,x = c$ el signo menos ante el término b/2 tendría que ser sustituido por un signo más.

Este método admite una expresión gráfica que fue conocida y sistematizada en su aplicación a la ecuación cuadrática por los árabes. Así, el miembro de la izquierda $x^2 + b\,x$ se representaría como un cuadrado de lado x junto a un rectángulo de lados b y x. El rectángulo puede descomponerse en dos rectángulos de lados b/2 y x que, en razón de esta última longitud, pueden disponerse alrededor del cuadrado inicial (figura 67). Las partes ralladas tendrán en total un área de $x^2 + b\,x$ y por tanto equivalente a c.

Para completar el cuadrado de lado (x + b/2) bastaría añadir un cuadrado en el extremo de lado b/2, de manera que todas las manipulaciones algebraicas tendrían su representación en lo geométrico.

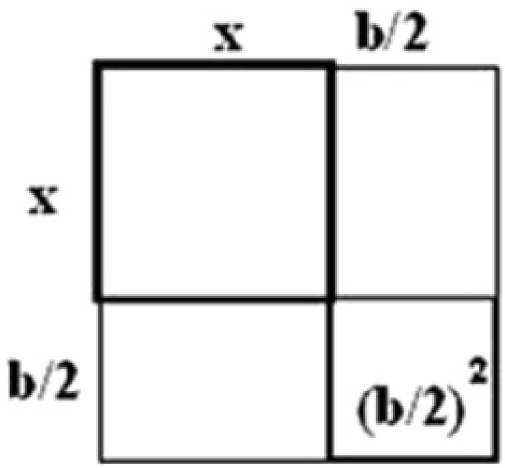

Figura 67

Sin embargo, es necesario dudar de que éste fuera el origen de la expresión entre los escribas mesopotámicos, particularmente por su tendencia a infrautilizar las representaciones geométricas, verdaderamente escasas en las tablillas recuperadas. Sus razonamientos suelen ser de naturaleza numérica y algebraica en el sentido de considerar la generalización de las relaciones numéricas conocidas.

Cabe entonces suponer que el origen de las instrucciones de los escribas para la resolución de la ecuación cuadrática tengan un origen numérico como el que se mostrará a continuación (Resnikoff y Wells, 1984).

Sean las dos ecuaciones que dan el producto y la suma de dos números que, a su vez, pueden opcionalmente ser considerados como los lados de un rectángulo:

$$x\,y = P$$

$$x + y = S$$

Si $x > y$ entonces se puede afirmar que sus valores pueden referirse a la semisuma de ambos más o menos una cantidad D:

$$x = S/2 + D$$

$$y = S/2 - D$$

Si se sustituyen estos valores en la ecuación que nos da el producto de ambos:

$$(S/2 + D)(S/2 - D) = P$$

$$(S/2)^2 - D2 = P$$

$$D^2 = (S/2)^2 - P$$

$$D = \sqrt{(S/2)^2 - P}$$

De modo que:

$$X = S/2 + \sqrt{(S/2)^2 - P}$$

$$Y = S/2 - \sqrt{(S/2)^2 - P}$$

que es una solución más acorde con los planteamientos usuales de los escribas.

Casos simples

Un caso de inmediata aplicación de las reglas mesopotámicas es señalado por Aaboe (1998). Es probable que el estudiante de escriba tuviera que enfrentarse a tablillas con diversos casos de cuadrática como éste para practicar repetidamente las reglas que resolvían estas ecuaciones.

"He añadido el área y dos tercios del lado de mi cuadrado y es 0; 35" (Op. cit., p. 23).

$$x^2 + 2/3\ x = 0;\ 35$$

que viene a resolverse con la siguiente secuencia:
"Toma 1, el coeficiente. Dos tercios de 1, el coeficiente, es 0; 40. La mitad, 0; 20. Multiplicado por 0; 20, (el resultado es) 0; 06.40. Añádelo a 0; 35 y (el resultado es) 0; 41.40 (que) tiene a 0; 50 como su raíz. 0; 20 réstalo de 0; 50 y 0; 30 es el (lado del) cuadrado".
En efecto, 0; 40 es la expresión sexagesimal de la fracción 2/3 y por tanto, hará el papel de coeficiente b de la incógnita x. Se forma así b/2 (0; 20) que se eleva al cuadrado $(b/2)^2 = 0; 20^2 = 0; 06.40$ a lo que hay que unir el valor de c:

$$(b/2)^2 + c = 0; 06.40 + 0; 35 = 0; 41.40$$

del que se halla su raíz cuadrada,

$$\sqrt{(^b/_2)^2 - c} = 0; 50$$

La solución viene dada finalmente restando a esta cantidad b/2 para obtener el valor que resuelve la ecuación inicial:

$$0; 50 - 0; 20 = 0; 30$$

Que algunos de los ejercicios encontrados planteen el caso de la ecuación cuadrática canónica (con el coeficiente de la x^2 siendo la unidad) no quiere decir que no resuelvan los de la ecuación generalizada, como se muestra en el ejemplo de Fauvel y Gray (1987, p. 31).

> *"Sumo siete veces el lado de un cuadrado y once veces su área, sea 6; 15. ¿Cuál es el lado?".*

equivalente a: $11 x^2 + 7 x = 6; 15$
Podría pensarse que la resolución pasa por transformar inicialmente esta ecuación en la canónica correspondiente:

$$x^2 + (7/11)\, x = 6;\ 15\ /\ 11$$

pero hay que considerar que 11 no tiene un recíproco sexagesimal finito por lo que no cabe esta solución.

Probablemente incluso se puede afirmar que el escriba presenta un coeficiente de la x^2 que imposibilita este cálculo para favorecer el que aprendan las instrucciones en la forma en que se le dan, incluyo la manera de eludir la presencia de un coeficiente de este tipo.

Así, lo que se hace responde a la secuencia ordinaria de acciones salvo en el hecho de que, en vez de considerar c, se toma (a c) y, finalmente, se divide por a el resultado final.

> *"Registras 7 y 11. Multiplicas 6; 15 por 11, es 1.08; 45. Divides 7 por 2, es 3; 30. Haces el cuadrado de 3; 30, es 12; 15. Sumas 1.08; 45, es 1.21. Es el cuadrado de 9. Restas 3; 30, es 5; 3 0. El recíproco de 11 no se puede encontrar. ¿Por qué debes multiplicar 11 para obtener 5; 30? Por 0; 30? Es el lado del cuadrado"*

El procedimiento entonces presenta los siguientes pasos:

1. Hallar a c = 11 x 6; 15 = 1.08; 45.
2. Se calcula b / 2 = ½ 7 = 3; 30.
3. que se eleva al cuadrado: $(b / 2)^2 = 3;\ 30^2 = 12;\ 15$.
4. para a continuación sumarle a c: $(b/2)^2 + a\,c = 12;\ 15 + 1.08;\ 45 = 1.21$
5. Se halla su raíz cuadrada, que resulta ser $\sqrt{1.21} = 9$
6. Para aplicar la fórmula:

$$^{b}/_{2} + \sqrt{(^{b}/_{2})^2 + a\,c} = -\ 3;\ 30 + 9 = 5;\ 30$$

7. y finalmente dividir por a (11) para llegar al resultado (0; 30).

Cambios de variables

Algunos de los sistemas de ecuaciones que los escribas se plantean son de cierta complejidad respecto a la formulación más conocida de contar con la suma y el producto de las dos variables. Ello obliga a hacer una serie de manipulaciones algebraicas destinadas a transformar el sistema de ecuaciones original en otro expresable de la forma más sencilla. Tal es el caso presentado por Resnikoff y Wells (1984, p. 79): *"Longitud, anchura. He multiplicado longitud y anchura, obtengo así el área. Entonces añado al área el exceso de longitud respecto de la anchura, 3.03. Además, he añadido longitud y anchura, 27. Se pide longitud, anchura y área".*

Aquí el planteamiento viene dado, en términos actuales, como

$$x + y = 27$$

$$x\,y + (x - y) = 3.03$$

El escriba entonces procede a hacer los cambios oportunos antes de aplicar la secuencia de reglas conocida:

"Suma 27 y 3.03, es 3.30. Suma 2 a 27, 29".

La primera operación implica sumar las dos ecuaciones dadas para transformarlas en:

$$x\,y + 2\,x = 3.30$$

$$x\,(y + 2) = 3.30$$

Obsérvese entonces que, de este modo, se ha cambiado la segunda ecuación original por otra donde figura el producto de dos variables, x e y + 2. Es por ello que se suma 2 a la primera ecuación. El planteamiento inicial se ha transformado en:

$$x + (y + 2) = 29$$

$$x\,(y + 2) = 3.30$$

o bien, considerando y' = y + 2

$$x + y' = 29$$

$$x\,y' = 3.30$$

donde se puede aplicar la secuencia de reglas que resuelven la ecuación cuadrática

> *"Toma la mitad de 29, 14; 30. Multiplicas 14; 30 y 14; 30, es 3.30; 15. Resta 3.30 de 3.30; 15, es 0; 15. ¿Qué número multiplicado por sí mismo es 0; 15? 0; 30. Suma 14; 30 y 0; 30, 15. Es la longitud. Quita 0; 30 a 14; 30, es 14, la anchura"* (Op. cit.).

Y ahora se termina deshaciendo el cambio de variable efectuado anteriormente:

> *"Resta 2, que añadiste a 27, desde 14, la anchura. 12 es la anchura real. Multiplica la longitud 15 por la anchura 12. Es 3.00, el área".*

La posibilidad de realizar estos cambios de variables les permite abordar una mayor variedad de sistemas de ecuaciones susceptibles de ser reducidos, finalmente, a la forma estándar. Éste es el caso que estudian Fauvel y Gray (1987, p. 32):

"Las superficies de dos cuadrados tomados juntos, 21.40. Los lados de los dos cuadrados multiplicados, 10.00".

El escriba plantea:

$$x^2 + y^2 = 21.40$$

$$x\,y = 10.00$$

Entre la aplicación de la regla se considera, como elemento nuevo, el cálculo del cuadrado de 10.00. En este paso se incluye el cambio de variable efectuado. En efecto, basta considerar

$$x^2 = x' \; y2 = y''$$

para que el sistema se transforme en:

$$x' + y' = 21.40$$

$$x' \, y' = 10.00^2 = 1.40.00.00$$

Así,

"Partes por la mitad 21.40, 10.50. Multiplica 10.50 por 10.50, 1.57.21.40. *Multiplica 10.00 y 10.00, 1.40.00.00* [en cursiva en el original]. Quita 1.40.00.00 de 1.57.21.40, 17.21.40".

Y ahora se halla la solución final de la ecuación planteada para, a continuación, deshacer el cambio mediante el cálculo de la raíz cuadrada de dicha solución:

> *"4.10 el lado [raíz de 17.21.40]. Añade 4.10 al primer 10.50, 15.00. 30 el lado del primer cuadrado [raíz de 15.00]. Quita 4.10 del segundo 10.50, 6.40. 20 es el lado del segundo cuadrado [raíz de 6.40]"*.

Sin llegar a constituir un cambio de variable, los escribas llegaban a plantearse situaciones donde las sustituciones a realizar no eran de ningún modo inmediatas y debían manipularse. Tal es el caso reseñado por Fauvel y Gray (1987, p. 32):

> *"Las áreas de dos cuadrados tomados juntos, 21; 15. El lado de uno es un séptimo menos que el otro"*.

Lo cual da paso a considerar el siguiente sistema:

$$x^2 + y^2 = 21;\ 15$$

$$y = 6/7 \; x$$

Vamos a seguir las instrucciones dadas por el escriba para poder interpretar que la resolución de este sistema de ecuaciones no se hacía solamente a través de la ecuación cuadrática sino por medio de la sustitución adecuada de la variable y.

"Escribe 7 bajo el 6. Multiplica 7 y 7, 49. Multiplica 6 y 6, 36".

Calculando el cuadrado: $y^2 = 6^2 / 7^2 x^2$

"Añádelo (el 36) al 49, 1.25".

La necesidad de sumar estos dos cuadrados debe venir dada por la siguiente sustitución en la primera ecuación:

$$x^2 + 6^2 / 7^2 x^2 = 21; 15$$

$$x^2 (1 + 6^2 / 7^2) = 21; 15$$

$$x^2 (62 + 7^2 / 7^2) = 21; 15$$

De la siguiente afirmación, "*El recíproco de 1.25 no puede ser encontrado. ¿Por qué debo multiplicar 1.25 para darme 21; 15? 0; 15*".

Se deduce que el cálculo es

$$(x/7)^2 (7^2 + 6^2) = 21; 15$$

$$(x/7)^2 1.25 = 21; 15$$

$$(x/7)^2 = 0; 15$$

Es por ello que ahora se realiza la raíz cuadrada (0; 30) de este número y se halla primero el producto por 7 (para dar el valor de x) y luego el producto por 6 (para obtener 6/7 x) con el objeto de hallar el valor de y:

"0; 30 el lado. 0; 30 a 7 multiplícalo, 3; 30 el primer lado. 0; 30 a 6 multiplícalo, 3 el segundo lado".

Capítulo 11
Plimpton 322

Teorema de Pitágoras

Es indudable que, como en todas las culturas de la Antigüedad, las relaciones establecidas entre los lados de un triángulo rectángulo eran conocidas con cierto grado de generalidad. Sólo así es posible entender algunas aplicaciones y cálculos efectuados en problemas recogidos sobre diversas tablillas. La cuestión, como en todas estas culturas nuevamente, no consistirá en precisar su aplicabilidad, que suele ser amplia, sino determinar el grado de generalización alcanzado ya que cualquier demostración general parece fuera de su alcance. Las relaciones pitagóricas presentan una naturaleza funcional, son ante todo instrumentos de cálculo para resolver problemas y no relaciones que tengan importancia por sí mismas ante las cuales, en consecuencia, sea preciso determinar mediante criterios de validación abstractos su validez general.

Son tan fragmentarios y escasos los datos encontrados en los restos arqueológicos que cabe tropezar con aplicaciones faltas de cualquier generalización y, por el contrario, otras donde se destacan formas de cálculo sofisticadas para la época. Así, por ejemplo, en una tablilla del período seléucida, ya en el primer milenio, se han encontrado 19 problemas que han sido denominados de "longitud, anchura y diagonal" (Van der Waerden, 1983).

> *"4 es la longitud, 3 la anchura. ¿Cuál es la diagonal? La magnitud es desconocida"* (p. 56).

Se presentan dos soluciones a este problema, en la primera se propone añadir la mitad de la longitud a la anchura

$$\frac{1}{2} L + A = D$$

mientras que la segunda resuelve el problema sumando la tercera parte de la anchura a la longitud

$$1/3\ A + L = D$$

Evidentemente, estas soluciones sólo son válidas para triángulos rectángulos concretos, en particular el más sencillo donde

$$A = 3,\ L = 4,\ D = 5$$

así como todos los derivados del mismo multiplicando por un entero positivo estas dimensiones:

$$(3,\ 4k,\ 5\ k) \text{ con } k\ X\ Z^{+}$$

El período seléucida es muy tardío ya que empieza en el siglo IV a.C. con la ocupación del trono babilónico por el rey de origen griego Seleuco I. Sin embargo, frente a reglas tan concretas y de aplicación tan poco generalizada, se encuentran otros resultados que denotan un conocimiento mayor y anterior. Así, en el período babilónico tardío se encuentra un problema como (Duvillié 1999, p. 116):

> *"Sea una caña de 0; 30. Desde arriba, desciende 0; 06. ¿Cuánto se ha alejado de abajo?".*

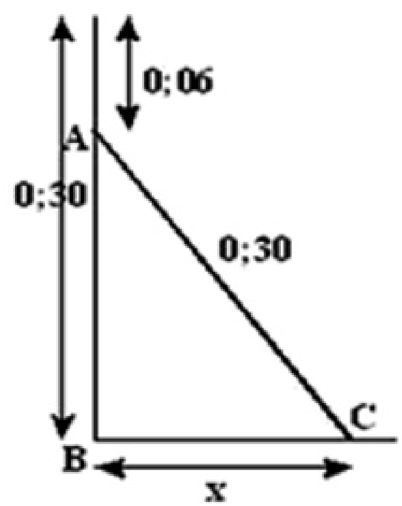

Figura 68

Considerando que, en su descenso, la caña de longitud 0; 30 forma un triángulo rectángulo ABC (figura 68) siendo AB, BC los catetos vertical y horizontal y AC la hipotenusa, la solución propuesta por el escriba denota un conocimiento general de la relación de Pitágoras. Sería la siguiente, tal como la desarrolla Duvillié (1999, p. 117).

1. *"Eleva al cuadrado 0; 30, encontrarás 0; 15".*

$$AC^2 = 0; 302 = 0; 15$$

2. *"Resta 0; 06 de 0; 30, será 0; 24".*

$$AB = 0; 30 - 0; 06 = 0; 24$$

3. *"Eleva al cuadrado 0; 24, encontrarás 0; 09.36".*

$$AB^2 = 0; 24^2 = 0; 09.36$$

4. 4. *"Resta 0; 09.36 de 0; 15, encontrarás 0; 05.24".*

$$BC^2 = AC^2 - AB^2 = 0; 15 - 0; 09.36 = 0; 05.24$$

5. *"¿De qué es el cuadrado 0; 05.24? De 0; 18. Sobre el suelo, está alejada 0; 18".*

$$BC = \sqrt{BC^2} = \sqrt{0; 05.24} = 0; 18$$

Se registra así una aplicación general de las relaciones existentes en un triángulo rectángulo que implica, naturalmente, el cálculo de raíces cuadradas. Es indudable que este cálculo es frecuente en la matemática mesopotámica en tanto el área de un campo cuadrado permite determinar la longitud de su lado o en los planteamientos de ecuaciones cuadráticas que se han realizado en el capítulo anterior. En lo que se refiere a los triángulos rectángulos, el cálculo de √2 es inmediato, al plantearse sobre cualquier cuadrado donde se aborde la relación entre la diagonal (hipotenusa del triángulo en que es posible dividir el cuadrado) y el lado. Así, para

Figura 69

un lado L la diagonal, por aplicación inmediata de la relación pitagórica, viene a ser L √2.

Que esta situación estaba presente en la matemática de esta cultura es evidente a partir del ejemplo siguiente, donde se puede encontrar (figura 69) una aproximación numérica muy exacta al valor de √2 (Neugebauer y Sachs 1986, pp. 42-43).

La tablilla muestra (figura 70) un cuadrado atravesado por sus dos diagonales dándose un número (30) que corresponde a un lado y dos números interiores:

1.24.51.10

42.25.35

Inmediatamente puede observarse que

30 x 1; 24.51.10 = 42; 25.35

y que el valor de este factor, cuando se eleva al cuadrado, es

$1; 24.51.10^2 = 1; 59.59.59.38.01.40$

Figura 70

En otras palabras, este factor es una excelente aproximación a √2, de manera que lo que el escriba refleja en la tablilla es el lado del cuadrado (30) que al multiplicarlo por la aproximación a √2 le permite obtener la longitud de la diagonal (42;25.35).

Vuelve a surgir así la cuestión del cálculo de raíces cuadradas. Existen bastantes tablillas que muestran en dos columnas distintos números y sus cuadrados, resultados que pueden invertirse a la hora de hallar la raíz cuadrada de un número. Por ejemplo, Neugebauer y Sachs (1986, p. 34) relacionan los siguientes resultados:

x^2	x
x	√ x
45.04	52
46.49	53
48.36	54
50.25	55
52.16	56
56.04	58
58.0	59
1	1
1.02.01	1.01
1.04.04	1.02
1.06.09	1.03
1.08.16	1.04
1.10.15	1.05
1.12.36	1.06
1.14.49	1.07

Los pequeños errores que se pueden encontrar en estas tablas denotan que son ejercicios para estudiantes en los que estos practicarían la correspondencia entre unos valores y otros. Sin embargo, mientras la relación de números x es correlativa, sus cuadrados dejan, naturalmente, huecos numéricos entre ellos. De esta forma, por ejemplo, la raíz cuadrada de 1.03 no se encuentra por medio de esta tabla. Caben, entonces, dos procedimientos aproximativos: O bien una interpolación lineal simplemente, lo que dará lugar a un error no despreciable, o un método basado en la media armónica que trabaja explícitamente Diofanto en el siglo III d.C.

Considérese entonces que ha de determinarse el valor de √2. Gracias a la tabla de cuadrados podemos encontrar una primera aproximación algo grosera pero, en todo caso, superior al valor buscado. Sea esta aproximación 1; 30.

Resulta que es

$$1;\ 30^2 = 2;\ 15$$

de manera que

$$\sqrt{2} < 1;\ 30$$

Si se divide 2 entre la aproximación postulada:

$$2 / 1;\ 30 < 2 / \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

se encuentra entonces una aproximación a $\sqrt{2}$ por defecto, es decir,

$$2 / 1;\ 30 = 2 \times 0;\ 40 = 1;\ 20 < \sqrt{2}$$

Pues bien, si

$$1;\ 20 < \sqrt{2} < 1;\ 30$$

una mejor aproximación será:

$$\tfrac{1}{2}\ (1;\ 20 + 1;\ 30) = 1;\ 25 \text{ donde } 1;\ 25^2 = 2;\ 00.25$$

Nuevamente, a esta aproximación por exceso le corresponderá otra por defecto,

$$2 / 1;\ 25 = 1;\ 24.42.21...$$

de modo que la media de ambas volverá a constituir una mejor aproximación:

$$\tfrac{1}{2}\ (1;\ 25 + 1;24.42.21...) = 1;\ 24.51.10.35...$$

que coincide con el valor encontrado en la tablilla.

De forma general, si se desea hallar una aproximación a $\sqrt{a}$ se escoge una primera aproximación a_1 por exceso tal que $\sqrt{a} < a_1$

Se construye entonces la aproximación por defecto

$$b_1 = a / a_1 < a / \sqrt{a} = \sqrt{a}$$

Hallando la media se obtiene una nueva aproximación por defecto,

$$a_2 = ½ (a_1 + b_1)$$

y se repite el procedimiento tantas veces como sea necesario.

La coincidencia del resultado alcanzado con el valor reflejado en la tablilla no es una prueba concluyente de que los mesopotámicos siguieran esta técnica de aproximación pero resulta una hipótesis creíble y coherente con otras formas de aproximación registradas en la época.

Los métodos babilónicos en torno a la relación pitagórica no son, en algunos casos, elementales.

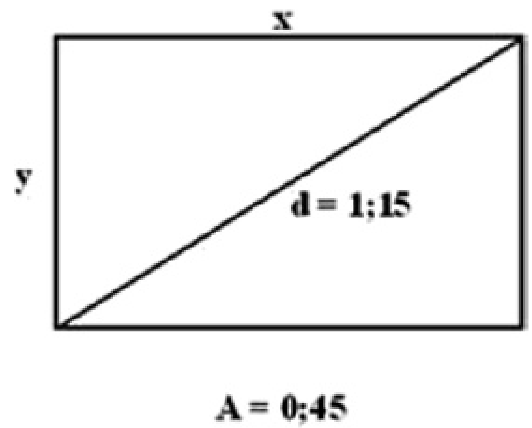

Figura 71

Geeverghese (1996) muestra un problema consistente en hallar las dimensiones de un rectángulo del que se conoce su área y la longitud de la diagonal:

> *"Hallar la longitud y anchura de la figura [71], dadas su área, 0; 45 y diagonal 1; 15"* (p. 173).

Dados estos datos se podrían plantear las ecuaciones,

$$x\ y = 0;\ 45$$

$$x^2 + y^2 = 1;\ 152 = 1;\ 33.45$$

de manera que despejando una de las incógnitas en la primera y sustituyéndolo en la segunda se alcanzaría una ecuación bicuadrática, reducible a una de las cuadráticas que se han tratado en el capítulo anterior. No es así, sin embargo, lo realizado por el escriba, como se puede apreciar examinando los sucesivos pasos que propone:

1. "Multiplicar el área por 2, resultado 1; 30".

$$2\ A$$

2. "Elevar al cuadrado la diagonal, resultado 1; 3 3.45".

$$d^2$$

3. "Restar 1; 30 de 1; 33.45, resultado 0; 03.45".

$$d^2 - 2\ A$$

¿Por qué formar esta resta? Hay que observar que forma el cuadrado de una resta que será utilizado posteriormente,

$$d^2 - 2\ A = x^2 + y^2 - 2\ x\ y = (x - y)^2$$

4. "Hallar la raíz cuadrada de 0; 03.45, resultado 0; 15".

Obteniéndose así el valor de $(x - y)$.

5. "Dividir por 2, resultado 0; 07.30".

$$\frac{1}{2}(x - y)$$

6. "Hallar la cuarta parte de 0; 03.45, resultado 0; 00.56.15".

$$1/4\ (x - y)^2$$

7. "Sumar el área a 0; 00.56.15, resultado 0; 45.56.15".

$$A + 1/4\ (x - y)^2 = x\ y + 1/4\ (x - y)^2$$

8. "Hallar la raíz cuadrada de 0; 45.56.15, es 0; 52.30".

Como resultado implícito se está utilizando el hecho de que

$$d^2 + 2\ A = x^2 + y^2 + 2\ x\ y = (x + y)^2$$

de manera que

$$\sqrt{^1/_4}\,(x - y)^2 + x\,y = \sqrt{^1/_4}\,(d^2 - 2\,A) + A = {^1/_2}\,\sqrt{d^2} + 2\,A = ½\,(x + y)$$

9. "La longitud es 0; 07.30 más 0; 52.30, es 1".

10. "La anchura es 0; 52.30 menos 0; 07.30, es 0; 45".

En efecto, se dispone del sistema de ecuaciones:

$$½\,(x - y) = 0;\,07.30 \text{ (Paso 5)}$$

$$½\,(x + y) = 0;\,52.30 \text{ (Paso 8)}$$

de modo que al sumar ambos resultados (x) y al restarlos (y) se obtienen los resultados deseados.

La tablilla Plimpton 322

Quizá la más famosa de las tablillas mesopotámicas sea una de 13 x 9 cm aproximadamente (figura 72), excavada de forma ilegal hacia 1920 en las ruinas de la ciudad de Larsa. Diversos aspectos de la misma, su aspecto tabular, la distribución de sus columnas, el período histórico característico de los documentos administrativos de Larsa permiten datar esta tablilla dentro de los sesenta años anteriores a la captura de la ciudad por Hammurabi en 1762 a.C. Es, por tanto, una tablilla del período babilónico tardío que fue a parar a manos de un editor neoyorquino, George Arthur Plimpton y donada a la universidad de Columbia en 1936, a su muerte, correspondiendo el 322 a su número de catálogo.

Presenta cuatro columnas de números que suelen denominarse, de izquierda a derecha, como I, II, III y IV, mostrándose el encabezamiento de las tres últimas columnas, no así de la primera que presenta, además de una melladura amplia en la parte superior, la ruptura de la tablilla en todo el lado izquierdo, siendo muy probable que la tabla continuara hacia ese lado con nuevas columnas cuya reconstrucción es objeto de todo tipo de discusiones. En el lugar de la ruptura se han hallado restos de pegamento moderno por lo que se puede sostener que, los que lo encontraron, pegaron otro trozo o trozos a continuación. Habiendo pasado inicialmente la tablilla por las manos del asiriólogo Edgar J. Banks, investigador riguroso pero que no tuvo noción de la importancia matemática de la tablilla, resulta probable que fuera él quien desprendiera los trozos extraños que los nativos que excavaron la pieza habían añadido fraudulentamente para elevar su precio en el mercado.

Figura 72

La tablilla presenta los datos numéricos presentados en la tabla 3. Hay que tener en cuenta, sin embargo, que aparecen diversos errores corregidos según lo presentado por Robson (2001, p. 173), recogiendo un análisis del por qué de estos errores y su posible corrección que será discutido más adelante. Respecto a la tabla de Robson, se ha añadido en negrilla y cursiva, bajo el valor probablemente correcto, el número erróneo que aparece realmente en la tablilla.

Las letras que aparecen junto a los encabezamientos de cada columna son también actuales mientras que el número 1, que aparece entre paréntesis en la columna I, corresponde a una hipótesis que será también discutida. Por último, a la derecha de la columna IV, que señala tan sólo el número de la fila correlativamente, se ha añadido una quinta columna con un dato hipotético que podrá entenderse seguidamente.

I. $(d/l)^2$ ó $(b/l)^2$	**II b**	**III d**	**IV**	**l**
(1) 59 00 15	1 59	2 49	1	2
(1) 56 56 58 14 50 06 15	56 07	1 20 25 ***3.12.01***	2	57 36
(1) 55 07 41 15 33 45	1 16 41	1 50 49	3	1 20
(1) 53 10 29 32 52 16	3 31 49	5 09 01	4	3 45
(1) 48 54 01 40	1 05	1 37	5	1 12
(1) 47 06 41 40	5 19	8 01	6	6
(1) 43 11 56 28 26 40	38 11	59 01	7	45
(1) 41 33 45 14 03 45 ***(1) 41 33 59 03 45***	13 19	20 49	8	16
(1) 38 33 36 36	8 01 ***9 01***	12 49	9	10
(1) 35 10 02 28 27 24 26 40	1 22 41	2 16 01	10	1 54
(1) 33 45	45	1 15	11	1
(1) 29 21 54 02 15	27 59	48 49	12	40
(1) 27 00 03 45 ***(1) 27 03 45***	2 41 ***7 12 01***	4 49	13	4
(1) 25 48 51 35 06 40	29 31	53 49	14	45
(1) 23 13 46 40	28 ***56***	53	15	45

Interpretación pitagórica

Aparentemente, los datos numéricos presentes no siguen un modelo reconocible. Tan sólo en la más compleja columna I los números aparecen en forma decreciente. En las demás columnas se presentan con pocas o muchas cifras numéricas, aumentando o disminuyendo. Sin embargo, es posible, en una segunda lectura, reconocer el modelo que subyace a los datos presentes. Para comprobarlo, considérese la fila 1.

$$\text{Columna II: } b = 1.59$$

$$\text{Columna III: } d = 2.49$$

Si elevamos al cuadrado ambos números:

$$b^2 = 1.592 = 3.56.01$$

$$d^2 = 2.492 = 7.56.01$$

Restando ambas cantidades se obtiene un cuadrado perfecto, a cuya raíz cuadrada podemos dar la denominación de 1:

$$d^2 - b^2 = 7.56.01 - 3.56.01 = 4.00.00$$

$$1 = \sqrt{4.00.00} = 2.00$$

de forma que se cumpliría la relación pitagórica

$$b^2 + 1^2 = d^2.$$

Este hecho se puede comprobar en todos los casos, de los que examinaremos dos filas más, la 5 y la 6.

Fila 5: $b = 1.05$ $d = 1.37$

$b^2 = 1.10.25$ $d^2 = 2.36.49$

de donde $d^2 - b^2 = 1.26.24$ $l = \sqrt{1.26.24} = 1.12$

Fila 6: $b = 5.19$ $d = 8.01$

$b^2 = 28.16.01$ $d^2 = 1.04.16.01$

de donde $d^2 - b^2 = 36.00.00$ $l = \sqrt{36.00.00} = 6.00$

Así pues, la tablilla Plimpton parece ser una colección de tripletas pitagóricas donde faltan los valores de uno de los catetos, quizá presentes en otra columna a la izquierda de los anteriores. Este hecho viene refrendado en gran medida por los encabezamientos de las columnas II y III que, respectivamente, vienen a indicar "el cuadrado del lado corto" y "el cuadrado de la diagonal". En acadio, la palabra "cuadrado" puede referirse también al lado de la figura cuadrada (Robson, 2001).

Sin embargo, no se obtienen tripletas pitagóricas de una forma aleatoria, máxime cuando los valores del cateto hipotético l son relativamente simples pero no así los correspondientes al otro cateto b ni a la hipotenusa d.

Además, tampoco se observa ni presencia de relaciones pitagóricas simples (como la más sencilla 3, 4, 5) ni otras derivadas de las anteriores (para el caso anterior, 6, 8, 10 ó 9, 12 ,15). Así pues, debe haber un método que permita generar tripletas de este tipo de forma que la tablilla sea una relación de los resultados obtenidos.

Es por este motivo que Neugebauer y Sachs (1986) postulan el conocimiento de los escribas mesopotámicos de la relación pitagórica que puede establecerse entre los tres números definidos a partir de otros más básicos p, q siempre que cumplan dos condiciones:

1. $p > q > 0$.
2. p y q no tienen divisores comunes salvo el 1 siendo, por tanto, primos entre sí.

La relación pitagórica sería:

$$b = p^2 - q^2$$

$$1 = 2\ p\ q$$

$$d = p2 + q2$$

donde

$$b^2 + 1^2 = (p2 - q^2)^2 + (2\ p\ q)^2 = (p^2 + q^2)2 = d^2$$

A partir de los datos de la tablilla no resulta complicado hallar los valores p, q que corresponden en cada caso. Veamos su deducción para las filas 1, 5 y 6.

<u>Fila 1</u>

$$b = p^2 - q^2 = 1.59$$
$$d = p^2 + q^2 = 2.49$$

Sumando:

$$2\,p^2 = 4.48 \quad p^2 = 2.24 \quad p = 12$$

de donde:

$$2.24 + q^2 = 2.49 \quad q^2 = 25 \quad q = 5$$

<u>Fila 5</u>

$$b = p^2 - q^2 = 1.05$$
$$d = p^2 + q^2 = 1.37$$

Sumando:

$$2\,p^2 = 2.42 \quad p^2 = 1.21 \quad p = 9$$

de modo que:

$$1.21 + q^2 = 1.37 \quad q^2 = 16 \quad q = 4$$

<u>Fila 1</u>

$$b = p^2 - q^2 = 5.19$$
$$d = p^2 + q^2 = 8.01$$

Sumando:

$$2\,p^2 = 13.20 \quad p^2 = 6.40 \quad p = 20$$

de donde:

$$6.40 + q^2 = 8.01 \quad q^2 = 1.21 \quad q = 9$$

De este modo, se puede defender una tabla que diera validez a las columnas II y III a partir de los valores originarios de p y q (Tabla 4).

p	q	p^2	q^2	2pq	II $p^2 - q^2$	III $p^2 + q^2$	IV	p / q
12	**5**	2 24	25	2 00	1 59	2 49	1	2;24
1 04	**27**	1 08 16	12 09	57 36	56 07	1 20 25	2	2;22 13 20
1 15	**32**	1 33 45	17 04	1 20 00	1 16 41	1 50 49	3	2;20 37 30
2 05	**54**	4 20 25	48 36	3 45 00	3 31 49	5 09 01	4	2;18 53 20
9	**4**	1 21	16	1 12	1 05	1 37	5	2;15
20	**9**	6 40	1 21	6 00	5 19	8 01	6	2;13 20
54	**25**	48 36	10 25	45 00	38 11	59 01	7	2;09 36
32	**15**	17 04	3 45	16 00	13 19	20 49	8	2;08
25	**12**	10 25	2 24	10 00	8 01	12 49	9	2;05
1 21	**40**	1 49 21	26 40	1 48 00	1 22 41	2 16 01	10	2:01 30
2	**1**	4	1	4	3	5	11	2
48	**25**	38 24	10 25	40 00	27 59	48 49	12	1;55 12
15	**8**	3 45	1 04	4 00	2 41	4 49	13	1;52 30
50	**27**	41 10	12 09	45 00	29 31	53 49	14	1;51 06 40
9	**5**	1 21	25	1 30	56	1 46	15	1;48

Tabla 4

Los valores de p y q resultan sencillos estando todos incluidos en las conocidas tablas de recíprocos que construían en esta época.

Sin embargo, no se comprende bien por qué escoger los valores que se presentan o, en otras palabras, qué criterio consideraría el escriba para tomar los valores p y q de la forma en que supuestamente lo hizo.

A este respecto, se ha sugerido que la razón p/q (columna derecha de la tabla 4) desciende de forma monótona desde el primer valor (2; 24) hasta el último (1; 48) pero tampoco es posible justificar la importancia de esta variable p/q, aparentemente no utilizada para formar las tripletas pitagóricas, ni por qué debe oscilar específicamente entre estos valores.

Las dificultades con esta interpretación en torno a los p y q se revelan mayores respecto a dos aspectos que serán tratados a continuación: La justificación de los errores de la tablilla y la naturaleza de la enigmática columna I.

Los errores

A partir de la consideración de las tripletas pitagóricas que parecen ser el modelo subyacente a los datos de la tablilla, se registran un total de cinco líneas con errores.

Fila 8

En la columna I aparece	(1) 41.33.59.03.45
siendo en realidad	(1) 41.33.45.14.03.45.

Es posible que sea un simple error de trascripción del cálculo correspondiente, por cuanto 45 + 14 = 59 y, debido a alguna distracción, el escriba ha podido sumar las dos posiciones antes que escribirlas consecutivamente.

Fila 9

En la columna II se escribe 9.01 en vez de 8.01 en lo que puede suponer un claro error de trascripción.

Fila 13

En la columna I se escribe (1) 27.03.45
en vez de la correcta (1) 27.00.03.45.

Teniendo en cuenta la ausencia del cero es posible que lo que pueda parecer un error actualmente no lo sea en el contexto de la época. Sin embargo, sí se contabiliza un error marcado en la columna II donde el valor correcto 2.41 es sustituido por 7.12.01 que presenta la particularidad de ser su cuadrado: 2.412 = 7.12.01 que podría deberse al hecho de que la columna I supone el cálculo de un cuadrado y dicho procedimiento se ha extendido erróneamente a la columna siguiente.

Fila 15

Las columnas II y III presentan los valores 56 y 53, respectivamente, lo que constituye una excepción por cuanto, en todos los casos el valor de la columna III es superior al de la II al corresponder a la hipotenusa respecto al cateto. Es por ello que se deduciría que uno de los dos valores es erróneo, o 56 es inferior o 53 superior. La interpretación que se discutirá posteriormente de la columna I indica que el valor correcto es el de la columna II (56) siendo el correspondiente de la columna III, el de 1.46, justo el doble de 53. Así pues, el error parece consistir en escribir en la columna III la mitad del valor que debería escribirse.

Fila 2

El error que aparece en esta fila es el más extraño y difícil de explicar. Consiste en presentar para el valor de la hipotenusa, en la columna III, el número 3.12.01 en vez del que sería correcto 1.20.25. No existe relación inmediata entre ambos, como sucedía en las filas 13 y 15, ni puede ser objeto de una distracción del escriba durante la copia, como en las filas 8 y 9. Así pues, el error 3.12.01 es el fruto de una serie de cálculos aparentemente erróneos.

Pero ¿es realmente un error? Probablemente. Los valores p, q, como se puede apreciar, son valores enteros sin parte decimal. En caso de considerar los datos que se registran en la tablilla:

$$b = p2 - q2 = 56.07$$

$$d = p2 + q2 = 3.12.01$$

su suma da lugar a p2 = 2.04.04 y luego q2 = 1.09.57, que no tienen una raíz cuadrada entera, en contra de lo obtenido en el resto de la tabla. Además, bajo la interpretación pitagórica de la columna I, como luego se verá, los datos coinciden con un valor de la diagonal de 1.20.25 que conduce a unos valores de p = 1.04 y q = 27, enteros en la línea de los presentes en las demás filas.

¿Por qué el error? Es casi imposible dar la razón última. Lo esperable es que, a partir de esos valores de p y q, se realice

$$p^2 + q^2 = 1.20.25$$

Sin embargo, las operaciones que parecen hacerse y justificarían el resultado obtenido erróneamente, empezarían por plantearse (Robson, 2001):

$$(p + q)^2 - 2\ p\ q$$

que daría el mismo resultado. No obstante, podría haberse equivocado olvidando multiplicar por p en último lugar:

$$(p + q)^2 - 2\ q = 1.312 - 2 \times 27$$

pero en realidad tampoco hace esto, sino que la equivocación se extendería al signo:

$$(p + q)^2 + 2\ q = 1.312 + 2 \times 27 = 2.18.01 + 54.00 = 3.12.01$$

Realmente complicado y prácticamente inverosímil desde la interpretación de los p, q.

La importante columna I

La aparente sencillez de los datos numéricos correspondientes a las columnas II y III junto a la hipotética columna que diera los datos del otro cateto l, contrastan con la misteriosa complejidad que presenta la columna I. Sus cantidades son largas, en contraste con las demás columnas, y se obtienen de un modo difícil de explicar y que debe modificar el sentido por el que se confeccionó la propia tablilla.

Considerando los datos hasta ahora citados, es decir, la presencia de un triángulo rectángulo de catetos l (el mayor) y b (el menor) y de hipotenusa d (figura 73), los datos de la columna I presentan dos posibilidades:

1. Pueden corresponder a la operación $(d / l)^2$ siempre que se considere que falta un uno sistemáticamente (tal como se presenta en la tabla 3). Ello es perfectamente admisible por cuanto esa unidad puede haberse sobreentendido en el momento de escribir los datos de la columna I.
2. Otra posibilidad es que los datos se ajusten a la operación $(b/l)^2$, tal como preferían entender Neugebauer y Sachs, en cuyo caso aparecerían correctamente escritos sin la unidad antecediéndolos.

La gran extrañeza y el misterio que rodean a esta tablilla Plimpton reside en la necesidad que tuviera un escriba, dedicado aparentemente a escribir una relación de triadas pitagóricas, para calcular esa expresión. Desde el punto de vista trigonométrico, d/l y b/l corresponden a funciones trigonométricas que estaban lejos de los conocimientos mesopotámicos. Por ello, la hipótesis inicial de que la Plimpton fuera una tablilla trigonométrica ha de ser excluido. Ni tales funciones ni siquiera la noción de ángulo como tal pertenecían por entonces al acervo conceptual de la matemática mesopotámica. Otra cuestión sería si las relaciones d/l y b/l fueran importantes por algún motivo, preludiando entonces de una forma primitiva el concepto de dichas funciones trigonométricas.

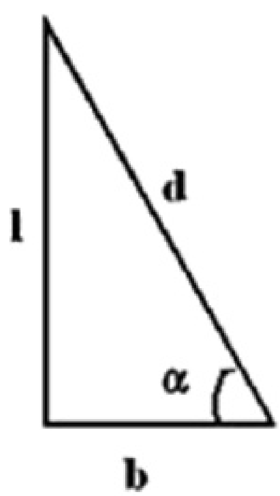

Figura 73

Los datos, hay que reconocer, son sugerentes. La razón b/l, en su valor inicial, es casi la unidad (0; 59.00.15) correspondiendo entonces a una figura prácticamente cuadrada, de manera que el ángulo α fuera aproximadamente de 45º. El valor final

(0; 23.13.46.40) correspondería a una relación b/l sobre un ángulo de unos 30º (o 60º tomando la relación contraria entre los catetos), con la importante observación de que la columna I sería entonces la de los valores de esta relación entre catetos expresada de un modo monótono decreciente desde los mencionados 45º hasta los 30º. La regularidad de tal disminución induce a sostener, precisamente, que la columna I es la guía para la obtención de las triadas pitagóricas que le corresponden.

Robson (2001) acumula datos para demostrar sobradamente que la construcción de tablas trigonométricas está fuera del alcance de los escribas mesopotámicos, terminando por afirmar:

> *"Sin un centro o radio bien definidos no puede existir un mecanismo para conceptualizar o medir ángulos, y por tanto, la popular interpretación de la Plimpton 322 como alguna clase de tabla trigonométrica queda sin significado"* (Op. cit., pp. 182-183).

Pese a ello cabe afirmar que la relación d/l ó b/l pueda tener importancia para definir la tabla, no tanto por la perspectiva anacrónica de que se establezcan unas funciones trigonométricas, sino por motivos distintos que no tienen nada que ver con ellas.

El triángulo rectángulo normalizado

Respecto a la tablilla Plimpton, Friberg (1995) plantea la posibilidad de que los datos en ella encerrados correspondan a un triángulo rectángulo "normalizado", entendiendo por tal aquel que se obtiene dividiendo la longitud b, l, d de los lados de un triángulo rectángulo por la longitud de uno de sus catetos (por ejemplo, l), tal como se muestra en la figura 74.

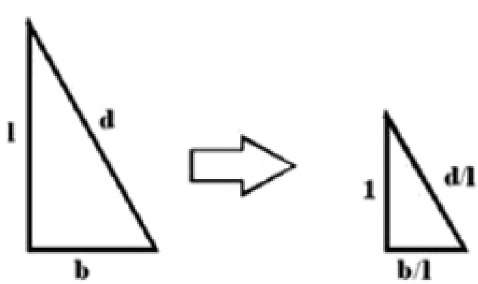

Figura 74

De este modo, en el nuevo triángulo deducido del original se cumpliría la relación pitagórica:

$$1 + (b/l)^2 = (d/l)^2$$

o bien:

$$(d/l)^2 - (b/l)^2 = 1$$

Ello justificaría el cálculo tanto de (b/l)2 como de $(d/l)^2$ en la columna I por motivos distintos de los trigonométricos. Si lo que se pretendiese, entonces, es determinar las relaciones existentes en el triángulo rectángulo normalizado que puede construirse a partir del más general (l, b, d) de dimensiones presentes en las columnas II y III, habrá entonces que justificar la utilidad de este nuevo triángulo. ¿Para qué les podía servir el establecimiento de datos del triángulo rectángulo original y del normalizado?
¿Qué aplicaciones se pueden encontrar a los mismos?
Hay que tener en cuenta que $(d/l)^2 - (b/l)^2 = 1$ se puede escribir:

$$(d /l + b /l) (d /l - b /l) = 1$$

$$(d + b / l) (d - b / l) = 1$$

que denota que ambos números son recíprocos:

$$x = d + b / l$$

$$1/x = d - b / l$$

Ahora, si sustituimos b, l, d por su valor en función de p y q, se encuentra una interesante simplificación:

$$x = d + b / l = p^2 + q^2 + p^2 - q^2 / 2pq =$$

$$= 2 p^2 / 2 pq = p/q$$

$$1/x = d - b / l = p^2 + q^2 - p^2 + q^2 / 2pq =$$

$$= 2\ q2 / 2\ pq = q/p$$

Hay que recordar que este valor hipotético de p/q (tabla 4) era, al igual que los valores de la columna I, monótonamente decreciente desde 2; 24 hasta 1; 48. Con estos resultados puede deducirse un posible camino de construcción de la tablilla Plimpton.

1. Se consulta inicialmente la tabla de recíprocos para obtener p y q con $p > q > 0$. Con ello está garantizada la división tanto por p como por q.
2. Se han escogido p y q primos entre sí para poder formar p/q (que actuará como x) y su recíproco q/p (que tomará el papel de 1/x).
3. Se forman, en función de p y q, los valores característicos de las tripletas pitagóricas:

$$b = p^2 - q^2 \quad 1 = 2\ p\ q$$

$$d = p^2 + q^2$$

4. Se tiene en cuenta cualquiera de las dos siguientes posibilidades:

$$x + 1/x = p/q + q/p = p^2 + q^2 / pq = 2\ (d / l) = C$$

$$x - 1/x = p/q - q/p = p^2 - q^2 / pq = 2\ (b / l) = D$$

5. Habiendo llamado C o D al resultado habido, resulta que desarrollando la suma o resta de un término y su recíproco, resulta

$$x + 1/x = C\ x^2 + 1 = C\ x$$

$$x - 1/x = D\ x^2 - 1 = D\ x$$

6. Se tienen así ecuaciones cuadráticas que pueden presentarse a los estudiantes para su resolución. El método que se aplicaba a dicha resolución implicaba el cálculo inicial de (½ C)2 o bien (½ D)2 para luego sumarle la unidad, hallar su raíz cuadrada y, finalmente, sumarle o restarle el mismo término (½ C) o (½ D). Ahora bien, ese valor que debe calcular el estudiante inicialmente es

$$(½\ C)^2 = (d\ /\ l)^2$$

$$(½\ D)^2 = (b\ /\ l)^2$$

7. que resulta ser el que se presenta en la columna I.

Desde el planteamiento de la construcción del triángulo rectángulo normalizado, por tanto, se ha podido llegar a postular el hecho de que los valores presentados en la tablilla Plimpton no respondan tan sólo al hecho de constituir triadas pitagóricas, sino que su funcionalidad se basa en servir de referencia para que el maestro de escribas, a partir de una serie de valores de una incógnita x (p/q), pueda construir los términos necesarios (columna I) para la resolución de ecuaciones cuadráticas que proponer a sus estudiantes. Ésta es la llamada hipótesis de los recíprocos que formuló inicialmente Bruins en los años 50 del pasado siglo para ser luego recogida por diversos autores hasta que Friberg la construyó de forma más completa. Ello le permitía sostener *que "El propósito del autor de la Plimpton 322 era escribir una "ayuda al profesor" para plantear y resolver problemas implicando triángulos rectángulos"* (Friberg, 1981, cit. en Robson 2001, p. 200) o bien

> *"La tablilla Plimpton no tiene nada que ver con tripletas pitagóricas o trigonometría sino, por el contrario, con una herramienta pedagógica entendida como una ayuda al profesor de matemáticas de la época para formar un gran número de ejercicios de ecuaciones cuadráticas igi- igibi [es decir, de pares recíprocos], tomando las soluciones conocidas y pudiendo evaluar fácilmente las etapas intermedias hacia la solución"* (Buck 1980, cit. en Robson 2001, p. 200).

Capítulo 12
Volúmenes

Unidades de volumen

El volumen básico consiste en un paralelepípedo de base cuadrada. Es por ello que las unidades de volumen han de referirse a las de longitud e, incluso, a las de área que resultan de éstas. En este sentido, hay que recordar que, en lo que se refiere a la longitud,

1 ninda = 12 codos

1 codo = 30 dedos

de manera que resulta un área básica de 1 ninda^2, que llamaremos "sar-a" al objeto de no ser confundido con otros términos unitarios también llamados sar.

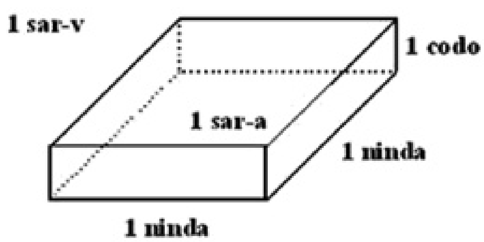

Figura 75

Pues bien, la unidad básica de volumen, como se ha dicho, es un paralelepípedo de base cuadrada y área un sar-a, siendo su altura de un codo (figura 75). A este volumen se le llamará "sar-v".

En principio puede parecer aconsejable la adopción de un cubo de un ninda de arista como unidad de volumen.

En ocasiones, tal unidad aparece pero sólo de manera excepcional y por alguna conveniencia de cálculo (al igual que el codo cúbico). Habitualmente, los volúmenes tienen una inmediata aplicación a la fabricación y apilamiento de ladrillos al objeto de levantar muros y es por este motivo que la altura de un codo resulta conveniente. En efecto, los ladrillos suelen tener entre 5 y 6 dedos de altura de manera que la adopción de una altura correspondiente a un codo simplifica muchos cálculos dado que en dicha altura cabrán cinco o seis hileras de ladrillos de 6 y 5 dedos, respectivamente.

Esta unidad conoce algún múltiplo, como el iku (100 sar-v) pero lo habitual es que se consideren submúltiplos como el gin (o siclo), que es 1/60 de sar-v, o el se (grano) que resulta 1/180 de gin. El gin o siclo tiene la particularidad de corresponder a una medida de capacidad de amplio uso, el gur, con lo que se garantiza la transformación entre unidades de capacidad y volumen, aspecto importante de cara al almacenamiento de grano y otros productos (figura 76).

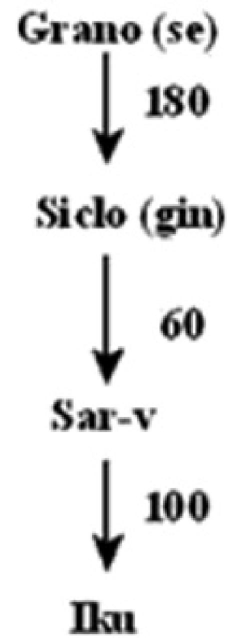

Figura 76

En resumen:

1 se = 1/180 gin

1 gin = 1/60 sar-v

1 sar-v

1 iku = 100 sar-v

Primeros problemas

Problema 1

En referencia a un muro o pilar se encuentra un problema que muestra la presencia de hasta tres sólidos distintos (A, B y C) para los que hay que calcular su volumen. Aquí serán tratados sucesivamente aunque forman parte del mismo problema (Neugebauer y Sachs, 1986, p. 56): *"6 ½ ninda y 5 codos de longitud, 3 codos de anchura superior, ½ codo de segunda profundidad. ¿Cuál es el volumen? 5/6 sar-v, 1 5/6 gin y 7 ½ se".*

La longitud presenta, además de 6 ½ ninda, 5 codos que han de ser transformados en nindas. Dado que cada uno de estos últimos equivale a 12 codos,

1 ninda = 12 codos

0; 05 nindas = 1 codo

así que

5 codos = 5 x 0; 05 nindas/codo = 0; 25 nindas

de manera que la longitud será de

Longitud = 6; 30 + 0; 25 = 6; 55 nindas.

Por su parte, la anchura dará lugar a:

Anchura = 3 codos = 3 x 0; 05 = 0; 15 nindas

con lo que el área de la base de este paralelepípedo es:

Longitud x Anchura = 6; 55 x 0; 15 = 1; 43.45 sar-a

que se multiplica por la altura en codos para alcanzar el volumen:

$$VA = 1;\ 43.45 \text{ sar-a} \times 0;\ 30 \text{ codos} = 0;\ 51.52.30 \text{ sar-v}$$

$$VA = 0;\ 50 + 0;\ 01.50 + 0;\ 00.02.30 =$$

$$= 5/6 \text{ sar-v} + 1\ 5/6 \text{ gin} + 7\ ½ \text{ se}$$

Respecto al volumen del cuerpo B se afirma: "*6 ½ ninda y 5 codos de longitud, ½ ninda de anchura inferior, ½ codo de profundidad. ¿Cuál es el volumen? 1 2/3 sar-v, 3 2/3 gin, 15 se. Total, 2 ½ sar-v, 5 ½ gin, 22 ½ se de volumen".*

Longitud = 6 ½ + 5 x 0; 05 = 6; 30 + 0; 25 = 6; 55 ninda

Anchura = 0; 30 nindas

Profundidad = 0; 30 codos

De modo que el volumen será:

$$VB = (6;\ 55 \times 0;\ 30) \times 0;\ 30 = 3;\ 27.30 \times 0;\ 30 = 1;\ 43.45 \text{ sar-v}$$

$$= 1;\ 40 + 0;\ 03.40 + 0;\ 00.05 = 1\ 2/3 \text{ sar-v} + 3\ 2/3 \text{ gin} + 15 \text{ se}$$

Así que

$$VA + VB = (5/6 + 1\ 2/3) \text{ sar-v} + (1\ 5/6 + 3\ 2/3) \text{ gin} + (7\ ½ + 15) \text{ se}$$

$$VA + VB = 2\ ½ \text{ sar-v} + 5\ ½ \text{ gin} + 22\ ½ \text{ se}$$

"*Y 15 gin volumen. ½ ninda es el lado del cuadrado, 1 codo la profundidad. Gran total, 2 5/6 sar-v, ½ gin, 22 ½ se de volumen".*

En este caso, el sólido C es un paralelepípedo de base cuadrada con un lado del mismo igual a medio ninda y profundidad de un codo, por lo que su volumen es

$$V_C = (0;\ 30 \times 0;\ 30) \times 1 = 0;\ 15 \text{ sar-v} = 15 \text{ gin}$$

con lo que el volumen total es

V = 2 ½ sar-v + (15 + 5 ½) gin + 22 ½ se =

= 2 + (½ + 1/3) sar-v + ½ gin + 22 ½ se

= 2 5/6 sar-v + ½ gin + 22 ½ se

Por sus dimensiones, la figura cuyo volumen se ha calculado debe corresponder a alguna parecida a la presentada en la figura 77.

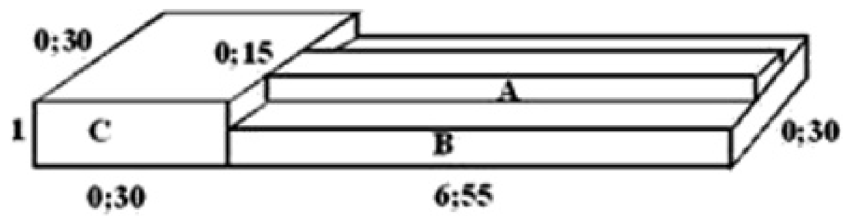

Figura 77

Problema 2

En el siguiente problema, referente a la irrigación de un campo desde una cisterna, el escriba mantiene el cálculo sobre nindas cúbicos, en vez de sar-v porque, como se comprobará, ello facilita el cálculo que se desea realizar (Fauvel y Gray, 1987, p. 27): *"Una cisterna tiene un cuadrado de 10 ninda (de lado), 10 ninda de profundidad. Vacío su agua; con este agua riego un campo hasta una profundidad de un dedo".*

A partir de la definición de unidad de volumen, la solución vendría dada empezando por calcular el volumen del agua de la cisterna:

10 x 10 x 10 nindas3 = 10 x 10 x 2.00 sar-v = 3.20.00 sar-v

Suponiendo el campo cuadrado de área A sar-a (ninda2) y profundidad de un dedo, equivalente a 1/30 de codo, es decir

1 dedo = 0; 02 codos

A x 0; 02 = 3.20.00 sar-v

A = 1/0; 02 x 3.20.00 = 30 x 3.20.00 = 1.40.00.00 sar-a

Pero el escriba no desea realizar transformaciones de ninda en codos, si puede evitarlo, máxime cuando la profundidad se elimina en el cálculo final. Por eso afirma, *"Poner 10 y 10 que forman el cuadrado. Poner 10, la profundidad de la cisterna. Poner 0; 00.10, la profundidad del agua que riega el campo".*

Esto es debido a que 1 dedo = 1/360 ninda = 0; 00.10 ninda.

"Tomar el recíproco de 0; 00.10, la profundidad del agua que riega el campo y (será) 6.00. Multiplica por 10, la profundidad de la cisterna (y el resultado es) 1.00.00... (El cuadrado) de 10, que forma el cuadrado, (y el resultado es) 1.40. Multiplica 1.40 por 1.00.00, que tenías en la cabeza. He regado un campo de 1.40.00.00 (sar-a)".

Lo que plantea entonces es trabajar en ninda^3 tras la transformación de la profundidad (1 dedo) en nindas (0; 00.10).

A x 0; 00.10 = (10 x 10) x 10

A = 1/0; 00.10 x (10 x 10) x 10 = 6.00 x 10 x (10 x 10)

A = 1.00.00 x 1.40 = 1.40.00.00 sar-a

Problema 3

Nuevas dificultades se presentan cuando el contenedor, cisterna o granero, es cilíndrico dado que se presentan dos problemas nuevos: El de calcular el volumen de este nuevo cuerpo y tratar de la capacidad equivalente a un volumen dado (Robson 1999, p. 115): *"Un codo es la circunferencia de un tronco. ¿Cómo es de grueso? Multiplica 0; 05 con 0; 05 y (resultará) 0; 00.25, que multiplicas por 4.48, el coeficiente fijado y el resultado es 2. 2 sila es el grosor del tronco".*

Entre los coeficientes geométricos se disponía del que daba el área en función de la circunferencia:

$$A = 0;\ 05 \times C^2$$

Actualmente podemos observar que una serie de operaciones lleva a una expresión similar. Así,

$$A = \pi\ (d/2)^2 = \pi/4\ d^2$$

pero se observa que:

$$C = 2\ \pi\ (d/2) = \pi\ d$$

$$d = C/\pi$$

de modo que

$$A = 1/4\ (\pi\ d)\ d = 1/4\ C\ C/\ \pi = 1/4\pi\ C^2$$

Con el valor de π que se conoce hoy en día, el coeficiente que multiplica a C^2 resulta ser de 0,07957...

Algo alejado del que, inicialmente daban los escribas en Mesopotamia,

$$0;\ 05 = 5/60 = 0{,}08333...$$

El valor que en este caso se plantea, sin embargo, cuando se afirma que

$$A = 0;\ 04.48\ C^2$$

es más aproximado al real, dado que es igual a

$$0;\ 04.48 = 4/60 + 48/60^2 = 0{,}07999...$$

De este modo, el escriba halla la base del contenedor,

$$A = 0;\ 04.48 \times 0;\ 05^2 = 0;\ 00.02 \text{ sar-a}$$

A partir de este punto el planteamiento del problema es algo confuso por cuanto se afirma que el grosor del tronco es de 2 sila, cuando el sila es una unidad de capacidad y no de longitud. Muy posiblemente, se esté afirmando que el grosor hace corresponder el volumen a una capacidad de 2 sila. A ese respecto, hay que partir de la equivalencia más extendida en aquel tiempo entre unidades de volumen y capacidad:

$$1 \text{ sila de capacidad} = 0;\ 00.00.12 \text{ sar-v}$$

por lo que,

$$2 \text{ sila de capacidad} = 0;\ 00.00.24 \text{ sar-v}$$

De este modo, ya se puede plantear el cálculo que soluciona el problema:

$$0;\ 00.02 \times \text{Grosor} = 0;\ 00.00.24 \text{ sar-v}$$

$$\text{Grosor} = 30.00 \times 0;\ 00.00.24 = 0;\ 12 \text{ codos} = 6 \text{ dedos}$$

Problemas de excavaciones

Una de las más frecuentes aplicaciones del cálculo de volúmenes se refiere a la tierra que es posible excavar para construir, por ejemplo, un canal de irrigación. El próximo capítulo se dedicará a tales cuestiones con mayor detalle, sobre todo relacionando el volumen con la carga de trabajo necesario y el número de hombres que debe realizarlo. En este apartado se presentan dos casos peculiares que sirven de introducción a los que se verán después.

Problema 1

El primero de ellos presenta una excavación en forma de pirámide truncada denominándola de forma genérica kilá, que puede traducirse como silo, prisma (Neugebauer y Sachs, 1986, p. 65): *"Un ki- lá. Cada lado del cuadrado superior es ½ ninda, cada lado del cuadrado inferior es 4 codos, ½ ninda de profundidad. ¿Cuál es el volumen? 1 sar-v y 5 gin es su volumen".*

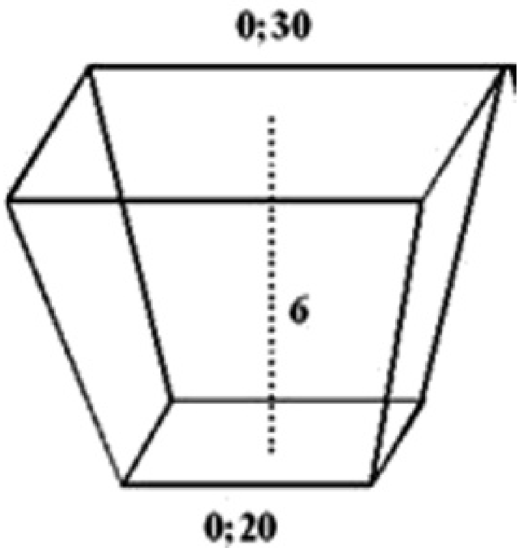

Figura 78

El cuadrado superior (figura 78) tiene por lado 0; 30 ninda mientras que el cuadrado inferior presenta un lado de 4 codos, equivalentes a 0; 20 nindas. Así pues, las dos bases tienen por áreas las siguientes:

$$A_{SUPERIOR} = 0;\ 30 \times 0{,}30 = 0;\ 15 \text{ sar-a}$$

$$A_{INFERIOR} = 0;\ 20 \times 0;\ 20 = 0;\ 06.40 \text{ sar-a}$$

Lo que el escriba debe considerar para llegar al resultado dado es la media aritmética de ambas áreas:

$$A = \tfrac{1}{2}\,(0;\ 15 + 0;\ 06.40) = 0;\ 10.50 \text{ sar-a}$$

de manera que la pirámide truncada se vea transformada en un prisma que tiene por área la media de las áreas de la pirámide. Entonces, considerando que la altura es de ½ ninda, equivalente a 6 codos, será:

$$V = 0;\ 10.50 \times 6 = 1;\ 05 \text{ sar-v}$$

Problema 2

En el capítulo 13 se examinarán cálculos relativamente sencillos de los volúmenes de excavación, pero aquí se presentará uno más complejo que enlaza con la resolución de ecuaciones cuadráticas que se estudió anteriormente (Fauvel y Gray, 1987, p. 29): *"7; 30 sar-a es el área, 45 sar-v el volumen; un séptimo de lo que* *excede la longitud a la anchura es su profundidad. ¿Cuál es la longitud, la anchura y su profundidad?".*

El transcurso de la solución propuesta en este caso por el escriba permite observar cómo relaciona el cálculo de volúmenes con los recursos algebraicos obtenidos a partir del estudio de ecuaciones.

"Cuando operes, toma el recíproco de 7; 30 sar-a, el área, (multiplica) por 45, tendrás la profundidad".

El cálculo es sencillo y consiste en aplicar adecuadamente la definición de volumen:

$$7;\ 30 \times P = 45$$

de forma que P, la profundidad, será:

$$P = 1/7;\ 30 \times 45 = 0;\ 08 \times 45 = 6 \text{ codos} = 0;\ 30 \text{ ninda}$$

"Divide por la mitad el un séptimo admitido y será 3; 30. Tomar el recíproco de su profundidad, será 0; 10, multiplica 0; 10 por 45, el volumen, y será 7; 30".

Éste es el planteamiento de las dos ecuaciones que dan lugar a la cuadrática. En primer lugar, el enunciado indica que, denominando L a la longitud y A la anchura de la base del prisma de que se trata,

$$1/7\ (L - A) = 0;\ 30$$

de donde la diferencia es igual a

$$L - A = 7 \times 0;\ 30 = 3;\ 30$$

interpretada como la mitad de 7.

En este caso, la profundidad ha sido interpretada como 0; 30 nindas. Sin embargo, a continuación se considera como 6 codos. Así, dado que el volumen viene definido como

$$V = L \times A \times P$$

será

$$L \times A = 1/P \times V = 1/6 \times 45 = 0;\ 10 \times 45 = 7;\ 30$$

planteándose el sistema:

$$L \times A = 7;\ 30$$

$$L - A = 3;\ 30$$

que actualmente da lugar a la ecuación cuadrática siguiente:

$$(A + 3;\ 30) \times A = 7;\ 30$$

$$A^2 + 3;\ 30\ A = 7;\ 30$$

resoluble como tal ecuación por el procedimiento habitual.

"La mitad de 3; 30 será 1; 45. Multiplica 1; 45 veces 1; 45 y será 3; 03.45. Añade 7; 30 a 3; 03.45 y será 10; 33.45. Para 10; 33.45 tomar su raíz cuadrada y será 3; 15. Operar con 3; 15 (dos veces) añadiendo 1; 45 una, restando 1; 45 otra y será la longitud y la anchura. 5 ninda es la longitud, (1 ½ ninda, la anchura)".

Es decir, siendo la ecuación $A^2 + b\ A = c$, las operaciones prescritas significan:

½ 3;30 = 1;45	$b/2$
$1;45^2$ = 3;03.45	$(b/2)^2$
3;03.45 + 7;30 = 10;33.45	$(b/2)^2 + c$
√10;33.45 = 3;15	$\sqrt{(b/2)^2 + c}$
1;45 + 3;15 = 5 (L)	$(b/2) + [\sqrt{(b/2)^2 + c}]$
- 1;45 + 3;15 = 1;30 (A)	$-(b/2) + [\sqrt{(b/2)^2 + c}]$

Raíces cúbicas

Hubo una tablilla publicada en 1906 (la CBM 12648), de difícil interpretación, que sólo hasta 1982, por medio de Friberg, pudo ser adecuadamente estudiada como un cálculo de volúmenes que implicaba la extracción de una raíz cúbica.

Esto es algo excepcional ya que, como se ha comprobado, la definición de la unidad básica de volumen descarta el uso de cubos como podría ser el ninda cúbico en beneficio de un paralelepípedo de base cuadrada (un sar-a) pero de altura 1/12 de ninda (un codo). La tablilla dice lo siguiente (Muroi 1985, p. 186): *"2 se y 1/12 se, de un hoyo. 2/3 de la longitud es la anchura. La mitad de la anchura es la profundidad. ¿Cuál es su longitud, su anchura y su profundidad? La longitud, la anchura y su profundidad, después las multiplicas juntas, haces su recíproco y multiplicas el volumen (por la respuesta), y extraes la raíz cúbica de 0; 00.00.15.37.30. La raíz cúbica de 0; 00.00.15.37.30 (es 0; 02.30...)".*

El texto presenta un paralelepípedo que tiene una longitud L, una anchura A presentando una profundidad P, probablemente una excavación. Su volumen se indica,

$$V = L \times A \times P = 2\ 1/12 \text{ se}$$

para señalar a continuación dos relaciones entre las dimensiones:

$$2/3\ L = A$$

$$½\ A = P$$

Estas relaciones, sustituidas en el valor del volumen dan lugar a:

- $V = L \times (2/3\ L) \times ½\ (2/3\ L) = 2/9\ L^3 = 0;\ 13.20\ L^3$
- $L^3 = 1/0;\ 13.20 \times 2\ 1/12$ se $= 4;\ 30 \times 0;\ 00.00.03.28.40$ ninda^3

dado que 1 se = 0; 00.00.01.40 ninda^3. En resumen, se tiene

$$L^3 = 0;\ 00.00.15.37.30 \text{ ninda}^3$$

Extrayendo la raíz cúbica,

$$L = 0;\ 02.30 \text{ ninda} = ½ \text{ codo}$$

Así pues, las raíces cúbicas eran un recurso algebraico disponible para resolver problemas de volúmenes cuando, por facilidad de cálculo, se consideraba como unidad el ninda3. La forma en que se obtenían estas raíces permite conocer en mayor profundidad el modo de afrontar problemas algebraicos de cierta complejidad de un modo empírico inicialmente para aplicar sobre los resultados así obtenidos diversos recursos y manipulaciones.

En efecto, son conocidas las tablillas donde se presentan números sucesivos, sus cuadrados y sus cubos (Neugebauer y Sachs, 1986). Una podría ser la siguiente (Tabla 5):

Número	Cuadrado	Cubo
0;01	0;0.01	0;0.0.01
0;01.30	0;0.02.15	0;0.0.03.22.30
0;02	0;0.04	0;0.0.08
0;02.30	0;06.15	0;0.0.15.37.30
0;03	0;0.09	0;0.0.27
0;03.30	0;0.12.15	0;0.0.42.52.30
0;04	0;0.16	0;0.01.04
0;04.30	0;0.20.15	0;0.01.31.07.30
0;05	0;0.25	0;0.02.05
0;05.30	0;0.30.15	0;0.02.46.22.30
0;06	0;0.36	0;0.03.36

Tabla 5

Supóngase que se desea calcular la raíz cúbica de 0; 03.50.24, por ejemplo. Entonces se considera un número auxiliar (1.04) cuya raíz cúbica es conocida (4) y de tal manera que la división 0; 03.50.24 / 1.04 = 0; 0.03.36 sea igual a uno de los números cubos de los que están presentes en la tabla. Entonces, se puede realizar la siguiente manipulación algebraica:

$$\sqrt[3]{0;03.50.24} = \sqrt[3]{1.04} \times \sqrt[3]{\frac{0;03.50.24}{1.04}} =$$

$$= \sqrt[3]{1.04} \times \sqrt[3]{0;0.03.36} = 4 \times 0;06 = 0;24$$

Esta forma de cálculo no es una simple hipótesis sino que está constatada su aplicación en un ejercicio explícito de cálculo de una raíz cúbica (Neugebauer y Sachs, 1986, p. 42): *"Ejemplo de raíz cúbica. ¿Cuál es la raíz cúbica de 3.22.30? Como 3.22.30 no da raíz cúbica, pon (debajo) 7.30.00, la raíz cúbica de lo que te dan, debajo de 3.22.30. ¿Cuál es la raíz cúbica de 7.30.00? 30. Tomar el recíproco de 7.30.00 y esa 0; 0.0.08. Multiplicar 0; 0.0.08 por 3.22.30 y es 27. ¿Cuál es la raíz cúbica de 27? 3. Multiplicar 3, la raíz cúbica, por 30, la otra raíz cúbica, y es 1.30. La raíz cúbica de 3.22.30 es 1.30".*

Así, como en el ejemplo anterior, se ha realizado lo siguiente:

$$\sqrt[3]{3.22.30} = \sqrt[3]{7.30.00} \times \sqrt[3]{\frac{3.22.30}{7.30.00}} =$$

$$= \sqrt[3]{7.30.00} \times \sqrt[3]{0;0.0.08 \times 3.22.30} =$$

$$= 30 \times \sqrt[3]{27} = 30 \times 3 = 1.30$$

Capítulo 13
Excavaciones

Los canales de irrigación

El elemento básico para la construcción era la arcilla que podía ser transformada, mediante cocido o secado, en ladrillos de adobe. Ello obligaba previamente a excavarla.

Del mismo modo, la excavación era el elemento fundamental para la construcción de canales de irrigación cuya importancia era esencial en la agricultura y la vida económica de Mesopotamia a lo largo de toda su historia.

Este capítulo trata de los problemas matemáticos y organizativos que estaban detrás de estas excavaciones, particularmente de los canales, por lo que conviene en primer lugar examinar su importancia al objeto de valorar los esfuerzos realizados por los escribas para controlar y organizar las excavaciones oportunas.

A principios del milenio IV se asiste a una ocupación sistemática de la parte sur de Mesopotamia, el territorio que rodea a la desembocadura de los ríos Tigris y Éufrates. Es un terreno fundamentalmente llano y salpicado de pantanos, marismas y brazos de agua cuyo control resulta esencial tanto para protegerse de las inundaciones como para mejorar su aprovechamiento extendiendo su presencia a campos no irrigados naturalmente, tal como se ha comentado en el capítulo 3. Una labor de este tipo conduce a la organización social de las familias y clanes dentro de una estructura en mayor o menor grado jerarquizada. Así pues, se asiste en este tiempo, tras el dominio de las técnicas esenciales de la agricultura y la ganadería, al control de las técnicas de regadío (Margueron, 1996).

El sistema de riego más frecuente consistía en desviar el cauce del río mediante una presa hacia un canal central del que derivaban canales subsidiarios que, a su vez, se subdividían en acequias que eran las que discurrían como una red a través de los campos que debían ser irrigados (figura 79). Habitualmente, estas acequias estaban algo elevadas respecto al terreno de manera que bastaba abrir un agujero o compuerta en las mismas para que, por gravedad, el agua inundara el campo. Hasta el primer milenio no se tuvo en cuenta la necesidad de drenar el agua sobrante de los campos de manera que, antes de ello, el agua sobrante quedaba embolsada sobre el terreno provocando la subida del nivel freático y, con él, la salinización progresiva de los campos.

Figura 79

Junto a las compuertas que permitían la distribución del agua existían obras importantes en el curso de los canales (sobre todo los centrales) como es el caso de los diques y los reguladores. Los primeros eran muros de contención en forma de rampas cuya construcción será tratada en el siguiente capítulo, así como los reguladores o muros de ladrillo cocido y betún (ambos, elementos impermeables) que contribuían a elevar el curso del agua en el canal, cuando su nivel era bajo, para su reparto en canales secundarios que estaban a una altura más elevada que dicho nivel. De la envergadura de estas obras da cuenta el hecho de que la construcción de un regulador era una obra celebrada en inscripciones y desviaciones de los ríos Tigris o Éufrates necesitando la intervención de un grupo numeroso de trabajadores junto a un control político de la zona y una capacidad organizativa considerable entre los escribas encargados.

De un regulador construido en Lagash durante el tiempo de Enmetena da cuenta el siguiente texto (Postgate, 1999, p. 217):

> *"Cuando Ningirsu ordenó sus ofrendas regulares en el templo Girnun y determinó el destino de Enmetena en el templo Eninnu, y Nanse lo miró con aprobación desde Sirara, Enmetena construyó para Ningirsu el regulador del canal Lummagin-du, de 648.000 ladrillos cocidos y 1.840 gur de betún".*

Hay que señalar también la importancia de los canales para el comercio por cuanto por los centrales y más caudalosos podían navegar barcos de mediano calado que transportaban productos a lo largo de la tierra mesopotámica.

Así pues, por la envergadura de las obras y su importancia económica era preciso organizar el trabajo de los hombres que excavaban estos canales. Ello empezaba por determinar el volumen de la tierra a excavar y, conforme a determinadas asignaciones de tierra por hombre e incluso de jornal por cada trabajador, determinar el número de trabajadores que debían enrolarse y los jornales que serían necesarios para su mantenimiento.

Volumen de las excavaciones

Problema 1

"Un canal de 5 ninda de longitud, 1 ½ ninda de anchura y ½ ninda de profundidad es excavado. A cada trabajador se le asigna excavar 10 gin y se le pagan 6 se. Encontrar el área, volumen, número de trabajadores y coste total" (Suzuki 2002, p. 28).

El cálculo del volumen resulta sencillo.

"Multiplicar longitud y anchura, será 7; 30, el área. Multiplicar 7; 30 por la profundidad, serán 45 sar- v, el volumen".

V = 5 x 1; 30 x 6 = 45 sar-v

"Multiplicar el recíproco de lo asignado, 6, por 45 para dar 4.30, el número de trabajadores. Multiplicar 4.30 por el jornal, serán 9 gin, el gasto total".

En efecto, dado que cada hombre puede excavar 10 gin, equivalente a 0; 10 sar-v, se tratará de dividir el volumen total (45 sar-v) entre esta cantidad, es decir, multiplicar por el recíproco:

Trabajadores = 1/0; 10 x 45 = 6 x 45 = 4.30 (270 trabajadores).

Conociendo este número y sabiendo que se le abonan 6 se de peso, equivalentes a 0; 02 gin de la misma magnitud, el gasto será:

Gasto = 4.30 x 6 se = 4.30 x 0; 02 gin = 9 gin de peso

Problema 2

"Un ki- lá. 3 ½ ninda, 3 codos es el lado del cuadrado, 2 ½ codos su profundidad, 7 ½ gin (su volumen) asignado (por trabajador), 6 se el jornal (por trabajador). ¿Cuál es el área, el volumen, el número de trabajadores y el total de plata?" (Neugebauer y Sachs 1986, p. 61).

Aunque los datos son algo más complejos, el cálculo del volumen no debe acarrear gran dificultad por cuanto la longitud del lado del cuadrado será de 3 ½ nindas más ¼ ninda, en total,

3; 30 + 0; 15 = 3; 45 nindas.

El volumen entonces resulta

V = 3; 45 x 3; 45 x 2; 30 = 35; 09.22.30 sar-v

La asignación de volumen de tierra por trabajador es diferente del caso anterior y ello merece un comentario aclaratorio. Existen medidas estándar de asignaciones por hombre en cuanto a la tierra excavada, pero los problemas suelen diferenciar tres niveles distintos:

1. Un nivel superior, hasta un codo de profundidad, cuando la asignación es de 0; 20 sar-v por hombre y día (1/3 sar-v).
2. Un nivel intermedio, entre un codo y tres de profundidad, en que la asignación se reduce a la mitad, 0; 10 sar-v por hombre y día (1/6 de sar-v).
3. Un nivel profundo, habitualmente desde los tres codos de profundidad hasta los 4 ½ codos, en que la asignación se queda en 0; 07.30 sar-v por hombre y día (1/8 sar-v).

Así pues, el problema planteado antes se refería a la excavación en un nivel intermedio mientras que el ahora tratado tiene que ver con el nivel profundo. En todo caso, se resuelve de un modo similar al anterior:

Trabajadores = 1/0; 07.30 x 35; 09.22.30 = 8 x 35; 09.22.30 = 4.41; 15

lo que supone un jornal total de:

6 x 4.41; 15 = 28.07; 30 se = 9; 22.30 siclos = 9 siclos 1/3 siclo 7 ½ se

Problema 3

Existen diversas variaciones en los problemas presentes en las tablillas indicando con ello su contexto escolar y su objetivo de practicar las reglas aritmético-algebraicas que permiten su resolución. Así, con los datos del primer problema presentado: *"Un ki- lá. 5 ninda es la longitud, 1 ½ ninda la anchura, ½ ninda su profundidad. 30 trabajadores acaban en 9 días. ¿Cuál es la asignación?"* (Fauvel y Gray 1987, p. 30), dándose la siguiente solución:

> *"Cuando operas, multiplica la longitud y la anchura, y será 7; 30. Multiplica 7; 30 por su profundidad y serán 45. Multiplica 30 trabajadores por 9 días y serán 4.30. Toma el recíproco de 4.30 y será 0; 0.13.20. Multiplica 45 y será la asignación. 10 gin (volumen) es la asignación".*

El planteamiento es sencillo. Se halla en primer lugar el volumen, 45 sar-v y, a continuación, el número total de jornadas de trabajo por hombre,

30 trabajadores x 9 días = 4.30 jornadas

de manera que

45 sar-v = 4.30 jornadas x Asignación

Asignación = 1/4.30 x 45 = 0; 0.13.20 x 45 = 0; 10 sar-v/hombre

Ecuaciones cuadráticas

Como se apuntó en el capítulo anterior, las ecuaciones cuadráticas, al igual que las cúbicas, surgen cuando los datos incluyen una relación entre las dimensiones del sólido de que se trata.

Problema 1

"El total de plata de un ki- lá son 9 gin. 5 ninda de longitud, 10 gin (volumen) la asignación, 6 se (plata) el jornal. El ancho excede a la profundidad en 1 ninda. ¿Cuál es el ancho y la profundidad?" (Neugebauer y Sachs 1986, p. 61).

A partir de los datos sobre jornales y asignación se llega a que, como en los problemas del apartado anterior, el volumen es igual a 45 sar-v. Por tanto, siendo A la anchura del volumen a excavar y P la profundidad en nindas (en codos, 12 P), será:

$$5 \times A \times 12\ P = 45$$

$$A \times 12\ P = 9$$

así que se obtiene la relación:

$$A \times P = 1/12 \times 9 = 0;\ 05 \times 9 = 0;\ 45$$

a lo que hay que unir

$$A - P = 1$$

Si el ancho excede a la profundidad en un ninda, quiere decir que el ancho A será igual a la profundidad P más un ninda. Tomándolo así en la primera relación,

$$(P + 1) \times P = 0;\ 45$$

$$P^2 + P = 0;\ 45$$

Tratable con el algoritmo acostumbrado para $P^2 + b\,P = c$:

$$b/2 = 0;\ 30$$

$$(b/2)^2 = 0;\ 15$$

$$(b/2)^2 + c = 1$$

$$\sqrt{(b/2)^2 + c} = 1$$

$$b/2 + \sqrt{(b/2)2 + c} = 0;\ 30 + 1 = 1;\ 30 \text{ nindas de ancho}$$

$$- b/2 + \sqrt{(b/2)2 + c} = - 0;\ 30 + 1 = 0;\ 30 \text{ nindas} = 6 \text{ codos}$$

Problema 2

"El volumen de un ki- lá es de 45 sar-v, ½ ninda es su profundidad. La mitad de la longitud es la anchura (después) de añadir 1 ninda a la anchura. ¿Cuál es la longitud y la anchura?" (Op. cit., p. 61).

En este caso, el volumen vendrá dado por:

$$L \times A \times 6 = 45 \text{ sar-v}$$

$$L \times A = 1/6 \times 45 = 0;\ 10 \times 45 = 7;\ 30$$

La segunda relación que se muestra en los datos del problema es que si a la anchura se le añade un ninda se tendrá la mitad de la longitud. En otras palabras, la longitud será igual al doble de la anchura más dos nindas:

$$½\ L = A + 1$$

$$L = 2\ A + 2$$

de modo que la primera relación se podrá expresar como:

$$(2 A + 2) x A = 7; 30$$

$$2 A2 + 2 A = 7; 30$$

o bien

$$A2 + A = 3; 45$$

que se resuelve de la forma habitual:

$$b/2 = 0; 30$$

$$(b/2)^2 = 0; 15$$

$$(b/2)^2 + c = 4$$

$$\sqrt{} (b/2)^2 + c = 2$$

$$b/2 + \sqrt{} (b/2)^2 + c = 0; 30 + 2 = 2; 30 \text{ nindas de largo}$$

$$- b/2 + \sqrt{} (b/2)2 + c = - 0; 30 + 2 = 1; 30 \text{ nindas de ancho}$$

Formas trapezoidales

Hasta ahora los problemas se han referido a canales con la forma de un paralelepípedo de base cuadrada o rectangular. Sin embargo, en muchas ocasiones los canales habían de adoptar otra forma para contener mediante un terraplén la presión de la tierra, que tendería a desmoronarlos. En la práctica estos terraplenes laterales adoptarían pendientes variadas aunque, en su estudio teórico en las escuelas, la pendiente correspondiera a un ángulo de 45º.

Se ha visto en el capítulo anterior un problema adelantado a los presentes, por el cual se consideraba una pirámide truncada con la base cuadrada superior mayor que la inferior, lo que corresponde probablemente a un pozo. En el caso de los canales la forma trapezoidal se refiere a los terraplenes de un solo lado adoptándose para el cálculo del volumen algo muy semejante a la técnica vista en aquel problema de la pirámide truncada: Transformación de la forma irregular en otra más regular en forma de paralelepípedo utilizando la media aritmética de las dimensiones diferentes. Esto se puede apreciar en el enunciado del siguiente problema:

"Un canal subsidiario. 5 us (longitud), 2 codos el ancho inferior, 2 codos su profundidad, 10 gin (volumen) la asignación. La inclinación para 1 codo de profundidad es de ½ codo. ¿Cuál es el ancho superior?", (Neugebauer y Sachs 1986, p. 78).

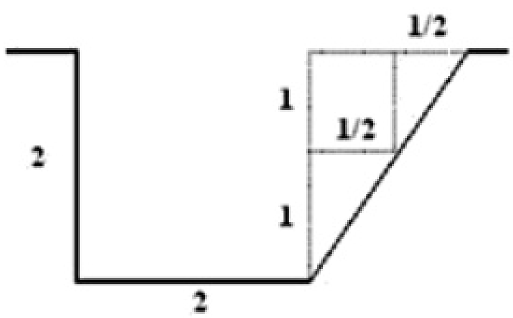

Figura 80

Así pues, el concepto de pendiente no tiene relación con el ángulo que forma el terraplén con la horizontal sino que se expresa como una relación entre la desviación horizontal por cada unidad de profundidad (figura 80). Por ello, el volumen se calcula conservando la longitud y profundidad del canal original pero en cuanto a la anchura variable, se calcula la media aritmética de la anchura mínima (inferior) y la máxima (superior). Así (figura 81), si la anchura varía entre 2 y 3 codos, se tomarán 2 ½ codos como anchura media, equivalente a 0; 12.30 nindas. De igual forma, los 5 us de longitud equivalen a 5.00 nindas, dado que hay 60 nindas en cada us, dando el siguiente volumen:

$$V = 5.00 \times 0;\ 12.30 \times 6 = 6.15 \text{ sar-v}$$

Un problema similar es el siguiente: *"Un canal subsidiario. 5 us es la longitud, 3 codos el ancho superior, 2 codos el ancho inferior, 2 codos su profundidad, 10 gin la asignación, 6 se (plata) el jornal del hombre. ¿Cuál es el área, el volumen, el número de trabajadores y el total de plata?"* (Op. cit., p. 78).

Siendo el ancho inferior de 2 codos y 3 el ancho superior, la media de ambos, 2 ½ codos (0; 12.30 nindas) servirá de ancho uniforme del paralelepípedo en que se está transformando la figura excavada. Así, el volumen será, en este caso, de:

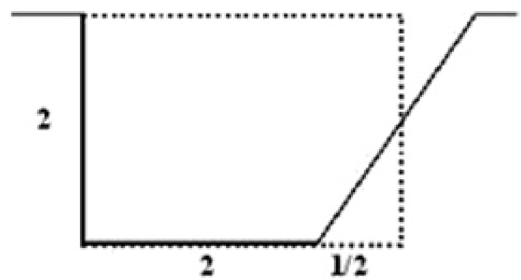

Figura 81

V = 5.00 x 0; 12.30 x 2 = 2.05 sar-v

Dado que la asignación es de 10 gin, equivalentes a 0; 10 sar-v por trabajador,

Trabajadores x 0; 10 = 2.05

Trabajadores = 1/0; 10 x 2.05= 6 x 2.05 = 12.30 hombres (750)

cuyo salario total será de

Salario = 12.30 x 6 = 1.15.00 se = 25 siclos =

= 1/3 mina 5 siclos

Viejos y nuevos canales

Los problemas de viejos y nuevos canales se encuentran en diversas tablillas denotando que tenían una presencia habitual en los cálculos de los escribas. La interpretación de los dos problemas que se presentan en este apartado es clara. Había dos motivos para su planteamiento: Los canales empezaban a empequeñecerse por el depósito de tierras arrastradas por la corriente de agua o bien por el desmoronamiento parcial de las paredes del canal. Ello provocaba un acortamiento de la anchura o bien de ambas dimensiones, la anchura y la profundidad, que había que rescatar a sus dimensiones originales. Los dos problemas expuestos tratan exactamente de ambas posibilidades.

En el primero se afirma: *"Un viejo, nuevo canal. 5 us es la longitud, 1 codo la anchura, 1 codo su profundidad. Su incremento aislado es ½ codo a cada lado. ¿Cuál es el volumen? 1/3 sar-v, 5 gin"* (Op. cit., p. 83).

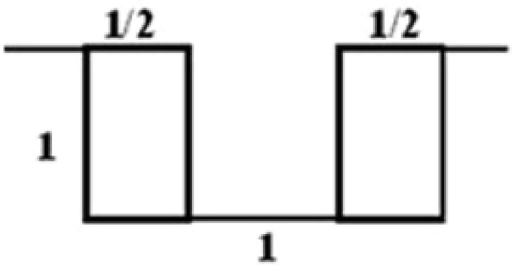

Figura 82

El volumen del viejo canal sería (figura 82):

^{V}VIEJO = 5.00 x 0; 05 x 1 = 25 sar-v

Lógicamente, el nuevo canal tendrá un volumen doble que el anterior:

^{V}NUEVO = 5.00 x 0; 10 x 1 = 50 sar-v

La respuesta del escriba es equivocada, ya que interpreta el volumen de la ampliación como 1/3 sar-v, 5 gin, equivalentes a 0; 25 sar-v en vez de los 25 sar-v que son en realidad.

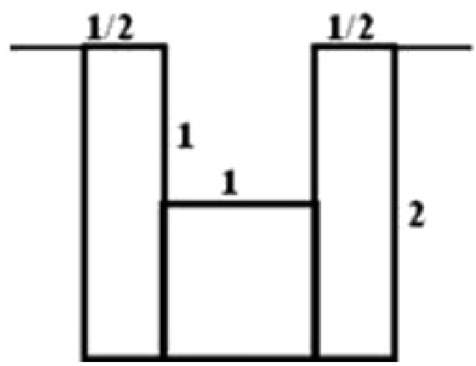

Figura 83

En ocasiones, la ampliación será tanto en anchura como en profundidad: *"Un viejo, nuevo canal. 5 us es la longitud, 2 codos el ancho, 1 codo de profundidad. Su incremento aislado ½ codo a los lados y se añade 1 codo de profundidad. ¿Cuál es el volumen? 1 iku es el volumen"* (Op. cit., p. 83).

Los dos volúmenes serán (figura 83)

^{V}VIEJO = 5.00 x 0; 05 x 1 = 25 sar-v

^{V}NUEVO = 5.00 x 0; 10 x 2 = 1.40 sar-v = 1 iku

de forma que la ampliación ha supuesto excavar un volumen de tierra de:

^{V}NUEVO - ^{V}VIEJO = 1.40 - 25 = 1.15 sar-v

Combinación de coeficientes

Existen coeficientes distintos según el nivel de excavación, como se ha visto. Se considera más fácil extraer tierra a un nivel superficial que a otro más profundo. Es por ello que existe un coeficiente como 0; 20 sar-v por hombre y día de trabajo para el nivel superior (lo que conocen como "trabajo inútil") mientras otro que resulta la mitad (0; 10 sar-v) para el nivel intermedio (mencionado como "trabajo de cesto"). La cuestión de resolver problemas de excavaciones se complica cuando se consideran dos de estos trabajos simultáneamente. ¿Cómo combinar los coeficientes de ambos tipos de trabajos cuando los dos se realizan al mismo tiempo? Ése es el problema que vienen a resolver con el método llamado de "combinación de coeficientes" (Robson, 1999).

> *"Un canal subsidiario. La longitud es de 5 us, la anchura son 3 codos, su profundidad es 3 codos. 1 codo de profundidad es 1/3 sar-v, el trabajo inútil. 2 codos de profundidad son 10 siclos, el trabajo de cesto. ¿Qué proporción al día hace un hombre el trabajo inútil? ¿Qué proporción al día hace un hombre el trabajo de cesto? ¿Cuál es el volumen? "*
>
> *"En un quinto de día ha excavado el trabajo inútil, 4 siclos (volumen). En 2/3 de día y un quinto de 2/3 de día ha hecho el trabajo de cesto, 8 siclos (volumen)"* (Op. cit., p. 100).

Aplicando los coeficientes, se tienen las siguientes equivalencias:

Nivel superior

Se realiza sobre un codo de profundidad.

Se excava 1/3 de sar-v, es decir, 0; 20 sar-v por hombre y día. Ello equivale a excavar en 3 días un sar- v.

Nivel intermedio

Se realiza sobre 2 codos de profundidad.

Se excava a razón de 0; 10 sar-v por hombre y día.

Esto significa que excava en 6 días un sar-v.

Como el trabajo total es sobre dos codos, necesitará 12 días para realizar el trabajo sobre los 2 sar-v.

En resumen, un trabajador que realiza una labor conjunta sobre ambos niveles, necesitará 15 días (3+12) para excavar un pozo de un sar-a de área y una profundidad de 3 codos, el primero del nivel superior y los dos siguientes del nivel intermedio (figura 84).

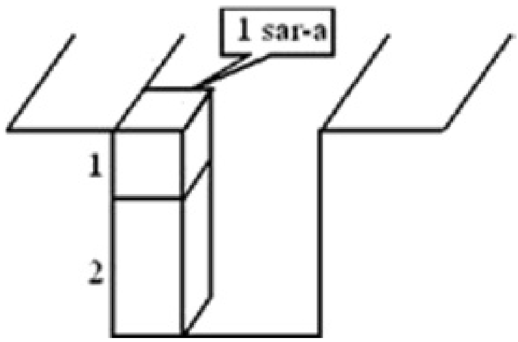

Figura 84

De estos 15 días, un total de 3 se dedicarían al nivel superior de manera que la proporción realizada sería 3 de 15:

3/15 = 1/5

Mientras que 12 de los 15 días se dedicarían al nivel intermedio, de manera que la proporción respecto al trabajo total sería:

12/15 = 4/5

Como esta proporción entre trabajo sobre el nivel superior y el intermedio se mantendría a lo largo de todos los días (conservando la participación de cada tarea en el trabajo total), lo realizado en un día de trabajo conjunto sería:

Nivel superior:

1/5 x 0; 20 = 0; 12 x 0; 20 = 0; 04 sar-v = 4 siclos

Nivel intermedio:

4/5 x 0; 10 = 0; 48 x 0; 10 = 0; 08 sar-v = 8 siclos

Así pues, el procedimiento consiste en reducir a una unidad de volumen el trabajo realizado en total. Se considera un paralelepípedo a modo de pozo, teniendo un sar-v de área cuadrada y una profundidad igual a la que tendrá finalmente la excavación. El total de trabajo realizado se reduce a este pozo para alcanzar la proporción en él (considerado como unidad de medida) del trabajo sobre cada nivel. Ello permite, finalmente, averiguar el trabajo realizado al día sobre cada nivel aplicándole el coeficiente oportuno.

Evidentemente, éste es un artificio matemático, una forma de reducción a la unidad de volumen que no se corresponde con la realidad puesto que primero ha de realizarse el trabajo sobre el nivel superior antes de encarar la misma excavación sobre niveles más profundos. En la práctica, por tanto, no hay un trabajo conjunto y proporcional cada día pero el artificio, que se aplica a la totalidad del trabajo supuestamente ya realizado, permite calcular todos los datos del problema, días de trabajo necesarios, hombres que deben trabajar, etc.

En otra situación, por ejemplo, en que se trabajara sobre los tres niveles en la forma más habitual de considerarlos:

Nivel superior

Se realiza sobre un codo de profundidad.

Se excava 0; 20 sar-v por hombre y día.

Ello equivale a excavar en 3 días un sar- v.

Nivel intermedio

Se realiza sobre 2 codos de profundidad.

Se excava a razón de 0; 10 sar-v por hombre y día.

Esto significa que excava en 6 días un sar-v.

Como el trabajo total es sobre dos codos, necesitará 12 días para realizar el trabajo sobre los 2 sar-v.

Nivel profundo

Se realiza sobre 1 ½ codos de profundidad.

Se excava a razón de 0; 07.30 sar-v por hombre y día.

Esto significa que excava en 8 días un sar-v.

Como el trabajo total es sobre codo y medio, necesitará 12 días para realizar el trabajo sobre el sar-v y medio resultante.

Así pues, el trabajo completo duraría

$$6 + 12 + 12 = 27 \text{ días}$$

de los cuales se registrarían las siguientes proporciones:

Nivel superior: 3/27 = 1/9

Nivel intermedio: 12/27 = 4/9

Nivel profundo: 12/27 = 4/9

lo que daría un trabajo diario de:

Nivel superior:

1/9 x 0; 20 = 0; 06.40 x 0; 20 = 0; 02.13.20 sar-v

Nivel intermedio:

4/9 x 0; 10 = 0; 26.40 x 0; 10 = 0; 04.26.40 sar-v

Nivel profundo:

4/9 x 0; 07.30 = 0; 26.40 x 0; 07.30 = 0; 03.20 sar-v

Capítulo 14
Construcciones en ladrillo

Materiales de construcción

Mesopotamia no dispone de materiales que permitan grandes construcciones duraderas. Mientras Egipto cuenta con diversas canteras de piedra que le permitieron realizar templos o pirámides que aún persisten, los restos encontrados de las edificaciones mesopotámicas son, en general, muy escasos y con graves deterioros causados por el tiempo. La razón hay que buscarla en el material empleado.

Carentes de piedra y madera de calidad, el mesopotámico levantaba sus casas, templos y palacios con el material más abundante a orillas del Tigris y el Éufrates: La arcilla.

Cuando la tierra era filtrada de sus impurezas fundamentales, se mezclaba con agua añadiéndole diversos elementos destinados a darle consistencia: paja picada, hierba, restos de huesos, arena, grava. Los animales pateaban esta mezcla hasta darle una consistencia suficiente y una homogeneidad que permitiera su manipulación. Durante un tiempo inicial se empleó esta arcilla o adobe así conseguida directamente sobre el lugar donde levantar el muro de la casa de que se tratase. Una limitación del método residía en que, tras dar una capa, había que esperar a su secado durante varios días antes de levantar una segunda capa, al objeto de que no se desmoronase. El resultado eran muros que se cubrían con ramas, paja y otros elementos impermeabilizantes. Si bien el adobe es un material aislante que permite estar fresco en verano y abrigado en invierno, presenta el grave problema de su fragilidad frente a las lluvias.

Al objeto de dar más consistencia al muro y construirlo con mayor rapidez se empezaron a confeccionar desde muy pronto ladrillos cocidos al sol (Margueron, 1996).

Para ello, se limpiaba una extensión de tierra plana echando paja a modo de impermeabilizante y, sobre la misma, se colocaban moldes de madera según las distintas dimensiones en que se deseara confeccionar los ladrillos. En estos moldes se echaba la arcilla hasta el borde, de forma que la altura de los moldes determinaba la del ladrillo resultante. Tras un mínimo secado se levantaba el molde y se repetía la operación al lado hasta llegar a fabricar varios centenares de ladrillos cada jornada. Sin embargo, habían de ser expuestos al sol durante varios días hasta que su capa superior se secara. Seguidamente, se levantaba el ladrillo así moldeado sobre una plancha y se le daba la vuelta para conseguir su secado por la otra cara.

Este procedimiento era algo lento y, también se observó desde su comienzo que se conseguía un efecto más rápido y eficaz cociendo en un horno los ladrillos. Rápido porque en el mismo día estaban terminados y eficaz porque, a semejanza de la cerámica (cuyo principio compartían), los ladrillos así obtenidos presentaban una mejora importante: Resultaban impermeables en más alto grado que los cocidos al sol. Sin embargo, el procedimiento no podía generalizarse por cuanto el combustible necesario para alimentar los hornos era difícil y costoso de conseguir. Obras como la puerta de Ishtar o el palacio de Nabucodonosor en la Babilonia del primer milenio, realizados con ladrillos esmaltados, eran excepcionales. En todo caso, a partir del tercer milenio el empleo de ladrillos cocidos se había generalizado a las construcciones principales de la ciudad (figura 85).

Figura 85

Pues bien, ya se disponía de ladrillos de dimensiones dadas por los moldes. Para construir los muros se colocaban sobre su superficie mayor de forma consecutiva y de manera que las sucesivas hiladas superpusieran ladrillos completos a las uniones de dos ladrillos en la precedente, tal como sucede en la actualidad. Tras cada hilada y entre ladrillos de la misma se empleaba, a manera de argamasa, un mortero hecho con arcilla y paja picada.

Tipos de ladrillos

Los ladrillos se medían individualmente en dedos. Su superficie cuadrada más amplia oscilaba entre los 10 dedos (16 centímetros) y los 30 dedos (aproximadamente medio metro) de lado. El grosor, sin embargo, era mucho más reducido siendo de cinco a seis dedos (8 ó 10 cm). Robson (1999), citando a Powell, menciona una relación de hasta 12 tipos diferentes de ladrillos, algunos cuyas dimensiones aparecen explícitamente en las tablillas y otros de los que sólo se conocen algunas características relacionadas con el volumen pudiendo deducirse consiguientemente sus dimensiones bajo la hipótesis de que son semejantes a las anteriores en cuanto a grosor y conservan, en general, la forma cuadrada más frecuente de la base.

Otros datos de cada tipo de ladrillo son importantes y resulta conveniente explicarlos antes de exponerlos en la tabla oportuna. Considérese el ladrillo de tipo 2, por ejemplo, aquél que presenta unas dimensiones de 15 x 10 x 5 dedos.

Siendo cada dedo 1/360 de ninda, se pueden hacer las transformaciones oportunas hasta deducir el volumen de uno de estos ladrillos: 0; 0.0.41.40 sar-v. Pues bien, los ladrillos de cualquier tipo no se presentaban por unidades sino en paquetes de 720, al modo en que sucede en la actualidad por las empresas fabricantes de ladrillos aunque utilizando cantidades diferentes. Un "paquete" de 720 ladrillos (12.00) es denominado también sar de manera que, para diferenciar su uso del referente a áreas y volúmenes, escribiremos en este caso "sar-b".

Pues bien, en el caso de ladrillos de tipo 2, ¿cuál es el volumen de un sar-b?

$$12.00 \times 0;\ 0.0.41.40 \text{ sar-v} = 0;\ 08.20 \text{ sar-v/sar-b}$$

Era muy utilizado por los escribas en sus cálculos de este tipo de construcciones la razón inversa, es decir, los sar-b (o paquetes) contenidos en una unidad de volumen (sar-v).

$$1/0;\ 08.20 = 7;\ 12 \text{ sar-b/sar-v}$$

que señala que, en cada unidad de volumen sar-v, hay 7 1/5 paquetes (o sar-b) de ladrillos de tipo 2. Este índice, en el original "*nalbanum"* (en inglés, *"brickage")* es de difícil traducción al castellano. Por su similitud con el actual término "tonelaje" referido a la unidad de peso, podría traducirse por "ladrillaje" pero se ha optado por el término original en este estudio. Así, diremos que los ladrillos de tipo 2 tienen un *"nalbanum"* de 7; 12.

De algunos ladrillos se conoce tan sólo el *nalbanum*, como se ha comentado anteriormente. Por ejemplo, los de tipo 7, siguiendo siempre la tipología de Powell, sólo son conocidos por su *nalbanum* que resulta de 3; 20. Invirtiendo esta cantidad se obtendrá el número de sar-v por paquete, es decir, 1/3; 20 = 0; 18.

Como hay 12.00 ladrillos en cada sar-b, resulta:

12.00 x Volumen ladrillo = 0; 18 sar-v

Volumen ladrillo = 1/12.00 x 0; 18 = 0; 0.05 x 0; 18 = 0; 0.01.30 sar-v

Este volumen equivale a 1620 dedos cúbicos que, divididos por un grosor de 5 dedos, resultaría en un área de 324 dedos cuadrados, cuya raíz cuadrada es 18 dedos. Así pues, este ladrillo sería probablemente de 18 x 18 x 5. Hay que tener en cuenta que si fuera de 6 dedos de grosor, el área del ladrillo sería de 270 dedos cuadrados que no tiene una raíz cuadrada exacta, aunque cabría que presentara una forma rectangular (por ejemplo, 18 x 15 dedos). Ello no es descartable pero, además de no afectar de manera importante a los volúmenes de los sar-b en estos ladrillos (uno de los elementos fundamentales en el planteamiento de problemas), hay dos criterios que inducen a suponer el tamaño propuesto al principio de 18 x 18 x 5. En primer lugar, el hecho de que, cuando la base del ladrillo no es cuadrada en aquellos ladrillos cuyas dimensiones sí son conocidas, la relación entre ancho y largo es la mitad (por ejemplo, 20 x 10) o bien las 2/3 partes (como en 18 x 12), no presentándose otras relaciones. En segundo lugar, la existencia de evidencias arqueológicas en torno a la tipología de Powell tras el examen de los restos de edificios construidos con ladrillos en aquella época.

Por todo ello, se han registrado hasta doce tipos diferentes de ladrillos (Robson 1999, pp. 59-60) que pueden presentarse con sus características principales (Tabla 6). La existencia del ladrillo de tipo 12 es más cuestionable que los anteriores porque no se han encontrado referencias de ningún tipo, ni en tablillas ni en edificaciones, de su existencia. La hipótesis de la misma es nuevamente de Powell que postuló este tipo de ladrillo en un papel de referencia respecto a los demás, debido a que el nalbanum y su recíproco son la unidad.

Tipo	Dimensiones	Volumen unitario	Volumen de un sar-b	Nalbanum
1	10 x 10 x 6	0;0.0.33.20	0;06.40	9;00
1a	12 x 9 x 6	0;0.0.36	0;07.12	8;20
2	15 x 10 x 5	0;0.0.41.40	0;08.20	7;12
3	20 x 10 x 5	0;0.0.55.33.20	0;11.06.40	5;24
4	18 x 12 x 5	0;0.01	0;12	5;00
5	15 x 15 x 5	0;0.01.02.30	0;12.30	4;48
7	18 x 18 x 5	0;0.01.30	0;18	3;20
8	20 x 20 x 5	0;0.01.51.06.40	0;22.13.20	2;42
9	20 x 20 x 6	0;0.02.13.20	0;26.40	2;15
10	24 x 24 x 5	0;0.02.40	0;32	1;52.30
11	30 x 30 x 5	0;0.04.10	0;50	1;12
12	30 x 30 x 6	0;0.05	1	1

Tabla 6

Fabricación de ladrillos

Los coeficientes combinados abordados al final del capítulo anterior suponen una herramienta matemática que permite la consideración de diversos trabajos conjuntos y complementarios. Tal es el caso de una tablilla encontrada en una ciudad de reino de Eshuna y contemporánea al reinado de Hammurabi (Robson 1999, p. 75): *"Fabricación de ladrillos, coeficiente combinado. ¿Cuál es la razón diaria de fabricación de ladrillos y cuál es lo que resulta de un hombre? En su trabajo se le asigna 0; 20 (sar-v), la razón diaria de excavación, 0; 20 la razón diaria de fabricación de ladrillos; 0; 10, la razón diaria de mezcla".*

Así pues, se consideran tres tareas: Por la primera se extrae tierra a razón de 0; 20 sar-v por hombre y día, tierra con la que se fabrican ladrillos a razón de otros 0; 20 sar- v por hombre y día para, finalmente, realizar mezcla (mortero, probablemente) a 0; 10 sar-v hombre y día.

Según el cálculo que hicimos entonces, será:

Excavación y fabricación

0; 20 sar-v por hombre y día.

En 3 días se excava un sar-v. Se fabrica un sar-v de ladrillos en el mismo tiempo.

Mezcla

0; 10 sar-v por hombre y día.

En 6 días se mezcla un sar-v.

Considerando el trabajo simultáneo de un hombre en las tres tareas, procesaría un sar-v de cada cosa en un total de 3 + 3 + 6 = 12 días

"Tomar el recíproco de 0; 20 y será 3. Tomar el recíproco de 0; 20 y será 3. Tomar el recíproco de 0; 10 y será 6. Añadirlos y serán 12. Tomar el recíproco de 12 y será 0; 05. 0; 05 es la razón diaria del coeficiente combinado".

Esta última operación corresponde a la razón diaria de realización de la tarea conjunta. Si un sar-v de cada tarea se realiza en 12 días, por día se concluirá 1/12 del total, es decir, 0; 05.

"El cuadrado de 0; 03.20, el lado cuadrado de un ladrillo y será el área del ladrillo, 0; 0.11.06.40. Convertir 0; 01, el grosor de un ladrillo y será 0; 12. Multiplicar 0; 12 por 0; 0.11.06.40 y será el volumen del ladrillo, 0; 0.0.02.13.20".

El objetivo último de este cálculo es averiguar el volumen diario de la tarea conjunta traducida a número de ladrillos. Para ello se necesita calcular el volumen de uno de estos ladrillos. El que se considera tiene una base cuadrada de lado 0; 03.20 ninda (20 dedos) y grosor 0; 01 ninda (6 dedos), lo que indica que es de tipo 9.

"Tomar el recíproco de 0; 0.02.13.20 y será 27.00. Multiplicar 27.00 por 0; 05, la razón diaria, y será el resultado de un hombre, 2.15 de ladrillos. El triple de 2.15, será 6.45, el resultado de la razón diaria".

Ya que el volumen de tierra procesada en las tres tareas cada día es de 0; 05 sar-v, habrá que dividir esta cantidad por el volumen del ladrillo 0; 0.02.13.20:

0; 05 / 0; 0.02.13.20 = 0;05 x 27.00 = 2.15 (135 ladrillos)

Como hay tres tareas distintas, el párrafo final de la tablilla parece sugerir que se contará con un equipo de tres hombres trabajando cada uno en una tarea distinta y es por ello que los ladrillos procesados al día son equivalentes al triple de lo que haría un solo hombre:

3 x 2.15 = 6.45 (405 ladrillos)

Transporte de ladrillos

Se han encontrado varios coeficientes en torno al transporte de ladrillos que es necesario interpretar (Op. cit. p. 83):

A. "4.30.00, el coeficiente de los ladrillos, transporte de ladrillos.
B. 3.22.30, su transporte.
C. 3.0.0, el coeficiente del transporte de medios ladrillos.
D. 1.41.15, el coeficiente de los ladrillos cuadrados".

En este sentido varios problemas tratan invariablemente el transporte en unas condiciones estándar, en concreto, 540 (9.00) ladrillos a lo largo de 30 nindas al día. Bajo estas condiciones, el número de ladrillos que se pueden transportar en un trayecto unitario de un ninda, sería:

9.00 x 30 = 4.30.00 ladrillos (coeficiente A)

que actuaría a modo de cantidad general sobre la que particularizar según el tipo de ladrillo. Así, en caso de considerar como se hace habitualmente, que se está tratando con ladrillos de tipo 2, el volumen correspondiente a estos ladrillos será:

4.30.00 x 0; 0.0.41.40 = 3; 07.30 sar-v

que sería entonces el volumen que es posible transportar sobre un ninda al día en lo que se refiere a ladrillos del tipo 2. Sin embargo, este volumen de trabajo puede considerarse general y aplicable a cualquier tipo de ladrillo, siempre que se adecúe el volumen fijado al de los ladrillos de que se trate.

Así, en los del Tipo 3:

3; 07.30/0;0.0.55.33.20 = 3.22.30 ladrillos de tipo 3 (coeficiente B)

Tipo 5:

3; 07.30/0;0.01.02.30 = 3.0.0 ladrillos de tipo 5 (coeficiente C)

Tipo 8:

3; 07.30/0;0.01.51.06.40 = 1.41.15 ladrillos de tipo 8 (coeficiente D)

a los que parece referirse la relación de coeficientes antes mostrada.

Con estos datos sobre transporte de ladrillos y el método de los coeficientes combinados, es posible entender el siguiente problema (Op. cit. p. 79*): "Razón diaria de fabricación de ladrillos. Sobre 5 (nindas), llevo aquí para fabricar ladrillos. ¿Cuál es el resultado de un hombre?*

En su trabajo se le asigna 0; 20, la excavación; 0; 20, el moldeado; 0; 10, la mezcla.

Vuelvo y tomo el recíproco de 5, la distancia, y será 0; 12. Multiplico 0; 12 por 45.00, lo andado, y será 9.00. Multiplico 9.00 por 0; 0.02.13.20, el cesto, y 0; 20 es el volumen que lleva 5 nindas".

El dato que sólo se incluye en la resolución del problema es que existe un transporte de tierras para fabricar ladrillos a lo largo de 45.00 nindas en total (unos 16 km), lo que parece referirse a la distancia total a desarrollar en varios viajes. El número de viajes precisamente se averigua dividiendo 45.00 entre 5 nindas, que es la distancia que separa la excavación del lugar de fabricación de ladrillos.

Esto, que supone multiplicar por el recíproco 0; 12, da lugar a 9.00 viajes (540). A este dato hay que añadir el volumen del cesto que permite el transporte de la tierra y que es de 0; 0.02.13.20 sar-v. Multiplicando el número de viajes por el volumen del cesto que se transporta en cada viaje se obtiene el volumen de tierra transportado:

9.00 x 0; 0.02.13.20 = 0; 20 sar-v

A partir de este momento se aplica el método de los coeficientes combinados a las cuatro tareas en curso: *"Tomar el recíproco de 0; 20 y será 3. Tomar el recíproco de 0; 20 y será 3. Tomar el recíproco de 0; 10 y será 6. Tomar el recíproco de 0; 20, el volumen, y será 3. Añadirlo y será 15. Tomar el recíproco de 15 y será 0; 04. Multiplicar 0; 04 por un día y será 0; 04, la razón diaria".*

Así, para la excavación, el transporte de tierra y el moldeado, será 0; 20 sar-v procesado por hombre y día. 3 días para procesar 1 sar-v en cada tarea.

Y para la realización de la mezcla:

0; 10 sar-v de mezcla por hombre y día.

6 días para mezclar 1 sar-v.

Considerando las cuatro tareas conjuntamente, 1 sar- v en cada una de ellas supondrán:

$$3 + 3 + 3 + 6 = 15 \text{ días}$$

de manera que por día se realizará la siguiente parte de la tarea conjunta:

$$1 \text{ sar-v}/15 = 0;\ 04 \text{ sar-v/día}$$

Finalmente, se consideran ladrillos de tipo 9, como en el problema del apartado anterior: *"El cuadrado de 0; 03.20, el lado cuadrado del ladrillo, será 0; 0.11.06.40, el área del ladrillo. Multiplicar 0; 0.11.06.40 por 0; 12 (codos), el grosor del ladrillo, y será 0; 0.02.13.20, el volumen del ladrillo. Tomar el recíproco de 0; 0.02.13.20, el volumen de un ladrillo, y será 27.00. Multiplicar por 0; 04, la razón diaria, y será 1.48 ladrillos, el resultado de un hombre. El triple de 1.48 será 5.24, el resultado de la razón diaria".*

Así, el volumen diario de trabajo conjunto (0; 04 sar-v) se divide entre el volumen de un ladrillo para obtener el número de ladrillos a que equivale el trabajo diario de cada trabajador para, posteriormente, multiplicarlo por tres al contar con un equipo de tres hombres:

0; 04 sar-v / 0; 0.02.13.20 sar-v/ladrillo = 0; 04 x 27.00 =

1.48 ladrillos diarios

3 x 1.48 = 5.24 ladrillos diarios (324)

Apilamiento de ladrillos

Como se ha dicho al comienzo de este capítulo, los ladrillos se colocaban apoyados en su cara más grande y con un grosor que oscilaba entre 5 y 6 dedos. Por ello, el escriba estará interesado en el área ocupada por ladrillos colocados de esta forma y querrá saber cuántos ladrillos hay en cada unidad de área. Sabiendo el área total prevista de los muros puede calcular con facilidad cuántos ladrillos deberá contar en cada capa. A este respecto se encuentra el siguiente coeficiente (Op. cit. p. 61):

"14.24, una capa de ladrillos"

que tiene una fácil interpretación. Los ladrillos de tipo 2 tenían una superficie de 15 x 10 dedos. Si se desea expresar el área correspondiente en sar-a, habrá de transformarse cada una de estas medidas en nindas:

10 dedos = 0; 20 codos = 0; 05 x 0; 20 = 0; 01.40 ninda

15 dedos = 0; 30 codos = 0; 05 x 0; 30 = 0; 02.30 ninda

para luego multiplicarse dando el área de la base de un ladrillo de tipo 2:

0; 01.40 x 0; 02.30 = 0; 0.04.10 sar-a

de manera que se pueda calcular el número de ladrillos correspondientes a un sar-a de muro:

Número ladrillos x 0; 0.4.10 sar-a = 1 sar-a

Número ladrillos = 1 / 0; 0.04.10 = 14.24 ladrillos

Otros casos serían:

Ladrillos tipo 3:

Dimensiones 20 x 10

Área base del ladrillo = 0; 0.05.33.20 sar-a

Número ladrillos/sar-a = 10.00 ladrillos

Ladrillos tipo 4:

Dimensiones 18 x 12

Área base del ladrillo = 0; 0.06 sar-a

Número ladrillos/sar-a = 10.48 ladrillos

Ladrillos tipo 8:

Dimensiones 20 x 20

Área base del ladrillo = 0; 0.11.06.40 sar-a

Número ladrillos/sar-a = 5.24 ladrillos

Ladrillos tipo 11:

Dimensiones 30 x 30

Área base del ladrillo = 0; 0.25 sar-a

Número ladrillos/sar-a = 2.24 ladrillos

Un problema distinto pero relacionado con el apilamiento de ladrillos, esta vez en forma de paralelepípedo, sería el siguiente (Op. cit. p. 66):

"La longitud es de 3 ½ nindas, 3 codos. Los ladrillos son tercios de codos cuadrados. La altura de la pila es de 4 codos, su anchura 2 codos. ¿Cuál es el volumen de la pila de ladrillos y cuántos ladrillos tiene?".

Las dimensiones de la pila de ladrillos serán:

Longitud = 3 ½ nindas 3 codos = 3; 30 + 0; 15 = 3; 45 nindas

Anchura = 2 codos = 0; 10 nindas

Altura = 4 codos

y el volumen V = 3; 45 x 0; 10 x 4 = 2; 30 sar-v

Los ladrillos serán de tipo 2 por cuanto un número entero caben en su longitud, anchura y altura. Respecto a la longitud, el ladrillo de tipo 2 tiene 15 dedos (0; 02.30 ninda) de manera que, en longitud, caben

3; 45 / 0; 02.30 = 3; 45 x 24 = 1.30 ladrillos

En anchura este ladrillo tiene 10 dedos (0; 01.40 ninda), así que

0; 10 / 0; 01.40 = 0; 10 x 36 = 6 ladrillos

Y en cuanto a la altura, presenta 5 dedos (0; 10 codos), de modo que:

4/0; 10 = 4 x 6 = 24 hileras

Eso significa que, en total, habrá

1.30 x 6 x 24 = 3.36.00 ladrillos de tipo 2 (12.960)

Esta forma de cálculo no era necesaria con las herramientas de que estaba provisto el escriba de la época. En efecto, si el volumen general de la pila (2; 30 sar-v) se multiplica por el *nalbanum* de los ladrillos de tipo 2, se obtiene el número de sar-b o paquetes:

2; 30 x 7; 12 = 18 sar-b

y como hay 12.00 ladrillos en cada sar-b, Número ladrillos = 12.00 x 18 = 3.36.00 ladrillos.

Levantamiento de muros

Considérese un problema similar al anterior (Op. Cit .p. 67): *"Un muro. La longitud es de 5 ninda, el grosor del muro es 0; 05.50, la altura es 12 (codos). ¿Cuántos son los ladrillos?".*

El volumen sería:

5 x 0; 05.50 x 12 = 5; 50 sar-v

Considerando que son del tipo 2, se pasaría a sar-b:

5; 50 x 7; 12 = 42 sar-b

y por último a ladrillos:

42 x 12.00 = 8.24.00 ladrillos (30.240)

Sin embargo, en la práctica hay que hacer una importante corrección a este cálculo. Los muros no son simplemente un apilamiento de ladrillos ya que hay que considerar que entre cada hilera se extiende una capa de mortero. A partir de este hecho se pueden entender algunos coeficientes que aparecen en las tablillas de la época (Op. cit. p. 67): *"6, el coeficiente de un muro de ladrillos". "2; 15, el coeficiente de un muro de ladrillos cocidos".*

Los ladrillos de tipo 2 tienen una altura de 5 dedos y lo mismo sucederá con una hilada de ellos. Pero a esa altura de 5 dedos el escriba le suma uno más destinado a la capa de mortero. Por ello, el volumen de los ladrillos supone los 5/6 del volumen del muro terminado. Por ello, en los cálculos con el *nalbanum* ha de corregirse su valor de esta forma.

Como el nalbanum es la cantidad de sar-b (paquetes) por cada unidad de volumen (sar-v), ha de multiplicarse por 5/6 para corregir el *nalbanum* y referirlo a la unidad de volumen (sar-v), no de ladrillos simplemente, sino de muro terminado.

Así,

Para los ladrillos de tipo 2:

5/6 x 7; 12 = 0; 50 x 7; 12 = 6

Para los ladrillos de tipo 8:

5/6 x 2; 42 = 0; 50 x 2; 42 = 2; 15

que coincide con los coeficientes encontrados en las tablillas.

De esta forma, la resolución del problema inicialmente presentado debería corregirse del siguiente modo:

5; 50 x 6 = 35 sar-b

35 x 12.00 = 7.0.0 ladrillos (25.200)

Para construir un edificio había de contarse con una serie de muros que, habitualmente, ocupaban en superficie entre la mitad y la tercera parte de la superficie total de la vivienda. De ahí la presencia de coeficientes como (Op. cit. p. 67):

"0; 20, el coeficiente de una casa construida".

que señala que los muros ocupan la tercera parte de la superficie de la vivienda. Así, por ejemplo, se puede considerar una casa de área dada 5 sar-a y cuyos muros llegan a una altura de 2 ½ ninda (30 codos). Bajo el supuesto de que los muros ocupan esa tercera parte antedicha, el escriba hallaría el volumen:

(5 x 30) x 0; 20 = 50 sar-v

Considerando que los muros se van a levantar con ladrillos de tipo 4 que tienen un nalbanum de 5, si se desea saber el número de paquetes o sar-b necesarios habrá de corregirse este coeficiente por la presencia de mortero:

5/6 x 5 = 0; 50 x 5 = 4; 10 sar-b/sar-v

de modo que la cantidad de paquetes de ladrillos sea:

50 x 4; 10 = 3.28; 20 sar-b

equivalentes a 3.28; 20 x 12.00 = 41.40.00 ladrillos (150.000).
Tras construir los muros de la edificación, se extendía sobre su techo una sustancia impermeabilizante si ésta era de importancia. De ahí que se manifieste en diversas tablillas (Op. cit. p. 70),

"0; 15, el coeficiente del betún seco".

En un problema se afirma que el volumen de betún necesario para cubrir un área de 1.40 sar-a es de 12 gur. Ello implica que el betún aplicado por sar-a es de:

Betún/sar-a = 12/1.40 = 12 x 0; 0.36 = 0; 07.12 gur/sar-a

Ahora bien, como un gur equivale a 4.00 sila, se puede transformar esta cantidad de betún en sila:

0; 07.12 gur/sar-a x 4.00 sila/gur = 28; 48 sila/sar-a

Dado que un sar-a equivale a 2.24 codos2 se puede expresar esta cantidad por codo cuadrado, resultando que en aquella época se extendía 0; 12 sila de betún por codo cuadrado, es decir, aproximadamente 1/5 litro ya que cada sila equivalía a un litro. En términos actuales (el codo cuadrado es aproximadamente 1/4 de metro cuadrado), se echaba 4/5 de litro de betún por metro cuadrado.

Demolición

De la misma forma que se levantan muros también hay que demolerlos en ocasiones, lo que comporta un cálculo de qué volumen de muro puede demoler un trabajador al día.

En ese sentido, se encuentra frecuentemente la expresión (Op. cit. p. 94):

"0; 03.45, el coeficiente de un muro de tierra".

cuyo sentido se puede explicar fácilmente a partir del siguiente problema (Op. Cit. p. 94): *"Un muro de tierra. El (ancho) es 1 codo, la altura es (1) codo, la carga de trabajo es 0; 03.45. ¿Qué longitud demuele un hombre? La longitud es de ½ ninda 3 codos".*

En efecto, el volumen demolido viene dado por 0; 03.45 sar-v, de manera que el cálculo de la longitud demolida es sencillo si se consideran las dimensiones (1 codo = 0; 05 nindas) y el resultado en codos:

Longitud x 0; 05 x 0; 05 = 0; 03.45 sar-v

Longitud = 1/0; 0.25 x 0; 03.45 = 2.24 x 0; 03.45 = 9 codos

Los cálculos de este tipo son habituales y sencillos de resolver (Op. cit. p. 89):

"Un muro de tierra. El ancho es de 2 codos, la altura de un codo. ¿Cuál es el resultado de un hombre? Multiplica 0; 10 por 1, su altura, y será 0; 10. Toma el recíproco de 0; 10 y será 6. Multiplica 6 que resulta por 0; 03.45, su coeficiente y será 0; 22.30. 0; 22.30 será el resultado de un hombre".

Reduciendo el ancho (2 codos) a nindas (0; 10) se cumplirá, respetando el coeficiente de trabajo de un hombre,

(0; 10 x 1) x L = 0; 03.45

0; 10 x L = 0; 03.45

L = 1/0; 10 x 0; 03.45 = 6 x 0; 03.45 = 0; 22.30 nindas longitud

Los cálculos pueden ser geométricamente más complejos si el objeto a demoler es un terraplén de sección triangular. Así sucede en:

"Un muro de tierra. Su longitud es de 5 us, su anchura de 2 codos, su altura es ½ ninda. En un codo (de altura) decrece 1/3 codo de anchura. Un hombre demuele quedando 1 ½ codos de altura. ¿Cuánta es la longitud (demolida en un día)?. 0; 21.20 nindas".

La anchura (BC) es de 2 codos (figura 86), equivalentes a 0; 10 ninda, y la altura (AB) de ½ ninda, es decir, 6 codos. Pues bien, el trabajador demuele hasta que

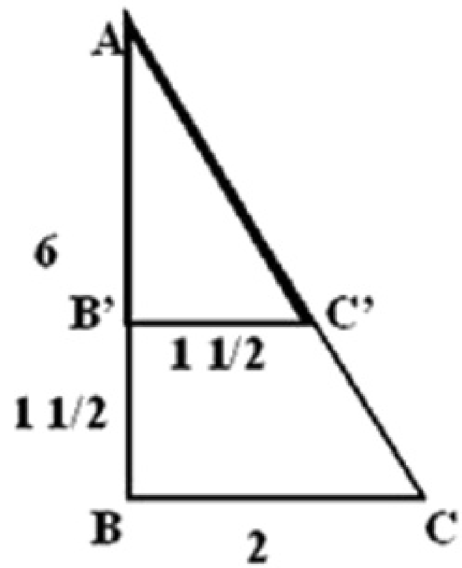

Figura 86

BB' = 1 ½ codos = 0; 07.30 ninda

Entonces,

AB' = 0; 30 - 0; 07.30 = 0; 22.30 nindas

Si en un codo de altura la anchura decrece 1/3 codo, en 1 ½ codo de altura decrecerá

1/3 + 1/6 = ½ codo de anchura.

Por tanto,

B' C' = 2 - ½ = 1 ½ codo = 0; 07.30 ninda

Se calcula entonces el área del triángulo AB'C' demolido:

Área = ½ (0; 07.30 x 0; 22.30) = 0; 01.24.22.30 sar-a

Tal como se puede comprobar en el resultado, demuele 0; 21.20 ninda al día, es decir, 4; 16 codos al día. Entonces, en un día el volumen de terraplén demolido alcanza a:

$$V = 4; 16 \times 0; 01.24.22.30 = 0; 06 \text{ sar-v/día}$$

Bibliografía

AABOE, A. (1998): *Episodes from the Early History of Mathematics*. Mathematical Ass. Of America, Washington, USA.
BENOIT, P., CHEMLA, K. y RITTER, J. (1992): *Histoire de fractions, fractions d'histoire*. Birkhäuser, Boston.
BLÁZQUEZ, J.M. y Otros (1992): *Historia de Oriente Antiguo*. Cátedra. Madrid.
BUNT, L., JONES, P. y BEDIENT, J. (1988): *The historical roots of elementary mathematics.* Dover, New York.
CALVET, L. (2001): *Historia de la escritura*. Paidós, Barcelona.
DUVILLIÉ, B. (1999): *Sur les Traces de l'Homo Mathematicus*. Ellipses, París.
FAUVEL J. y GRAY, J. (1987): *The history of Mathematics: A reader*. McMillan y Open University, Londres.
FRANKFORT, H. (1998): *Reyes y Dioses*. Alianza, Madrid.
FRIBERG, J. (1995): The use of knowledge in Ancient Mesopotamia. En SASSON, J.M. (Ed): *Civilizations of the Ancient Near East (vol. III).* Simon & Schuster MacMillan, New York.
GELB, I.J. (1982): *Historia de la escritura*. Alianza, Madrid.
GHEVERGHESE, G. (1996*): La cresta del pavo real*. Pirámide, Madrid.
GLASSNER, J. (1995): The use of knowledge in Ancient Mesopotamia. En SASSON, J.M. (Ed): *Civilizations of the Ancient Near East (vol. III*). Simon & Schuster MacMillan, New York.
GLASSNER, J. (2000): *Écrire à Sumer*. Editions du Seuil, París.
HOYRUP, J. (2002): A Note on Old Babylonian Computational Techniques. *Historia Mathematica,* 29, 193-198.
IFRAH, G. (1987): Las cifras. *Historia de una gran invención*. Alianza, Madrid.
JONES, P.S. (1994): *Recent discoveries in Babylonian Mathematics II*. En SWETZ, F.J.: *From Five Fingers to Infinity*. Open Court, Illinois, USA.
KOSTOF, S. (1988): *Historia de la Arquitectura*, *1*. Alianza, Madrid.
LARA, F. (Ed.) (1984): *Mitos sumerios y acadios*. Editora Nacional, Madrid.
LIVERANI, M. (1995): *El Antiguo Oriente*. Crítica, Barcelona.
MARGUERON, J.C. (1996): *Los mesopotámicos*. Cátedra, Madrid.

MATTESICH, R. (2000): *The beginnings of accounting and accounting thought*. Garland Pub., New York.
MAZA, C. (2000): *Las Matemáticas de la Antigüedad y su Contexto Histórico*. Servicio de Publicaciones, Universidad de Sevilla.
MELVILLE, D.J. (2002): Weighing stones in ancient Mesopotamia. *Historia Mathematica,* 29, 1-12.
MUROI, K. (1985): *Extraction of Cube Roots in Babylonian Mathematics*. Centaurus, 31, 181-188.
NEMET-NEJAT, K.R. (1982): *Late Babylonian Field Plans in the Bristish Museum*. Biblical Institute Press, Roma.
NEUGEBAUER, O. y SACHS, A. (1986): *Mathematical Cuneiform Texts.* American Oriental Society, New Haven, USA.
NISSEN, H.J., DAMEROW, P. y ENGLUND, R.K. (1993): *Archaic Bookkeeping*. University of Chicago Press, Chicago.
POLANYI, K. (1976): *Comercio y mercado en los Imperios Antiguos*. Labor, Barcelona.
POSTGATE, J.N. (1999): *La Mesopotamia Arcaica*. Akal, Madrid.
POWELL, M.A. (1995): Metrology and Mathematics in Ancient Mesopotamia. En SASSON, J.M. (Ed): *Civilizations of the Ancient Near East (vol. III*). Simon & Schuster MacMillan, New York.
RESNIKOFF, H.L. y WELLS, R.O. (1984): *Mathematics in civilization*. Dover, New York.
ROBSON, E. (1999): *Mesopotamian Mathematics*. Clarendon Press, Oxford.
ROBSON, E. (2001): Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A reassessment of Plimpton 322. *Historia Mathematica*, 28, 167-206.
SÁNCHEZ, J.A. (1943): *La Aritmética en Babilonia y Egipto*. CSIC, Madrid.
SANMARTÍN, J. y SERRANO, J.M. (1998): Historia Antigua del Próximo Oriente. Akal, Madrid.
SMEUR, A.J. (1969): On the value equivalent to π in ancient mathematical text. A new interpretation. *Archive for History of Exact Sciences*, 6, 249-270.
SUZUKI, J. (2002): *A history of Mathematics*. Prentice Hall, New Jersey.

VAN DER WAERDEN, B.L. (1983): *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Springer, Berlín.

WALKER, C. (1987): *Cuneiform*. British Museum Pub., Londres.